

Chaînes de Markov en temps continu et génétique des populations.

Correction des exercices 3 et 5 de la feuille 1 — 2014–2015

Nicolas Champagnat

Exercice 3

1. Il s'agit d'un processus de naissance, donc sa chaîne incluse est donnée par $Y_n = n + 1$ pour tout $n \geq 0$, et ses temps de séjours sont indépendants, exponentiels de paramètres $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$. Ainsi, le processus n'explose pas en temps fini ssi la somme de ces v.a. exponentielles est infinie p.s. C'est une conséquence directe d'un résultat du cours, puisque la somme des inverses des taux de sauts est infinie.
2. Par récurrence, il est clair qu'il suffit de démontrer que $Y_t = Y_t^1 + Y_t^2$ est un processus de Yule issu de $Y_0 = k + 1$ si les processus Y_t^1 et Y_t^2 sont des processus de Yule indépendants issus de $Y_0^1 = 1$ et $Y_0^2 = k$. La preuve qui suit est complètement détaillée, pour avoir un exemple complet où cette méthode est appliquée.

Il est clair que le processus Y_t est presque sûrement continu à droite et constant par morceaux, et que sa chaîne incluse est $Z_n = n + k + 1$ (cela ne serait pas le cas si deux instants de saut coïncideraient avec une probabilité positive pour les processus Y_t^1 et Y_t^2 , mais comme les deux processus sont indépendants et les instants de saut sont des v.a. à densité¹, ce n'est pas possible).

On note $(S_i)_{i \geq 1}$, $(S_i^1)_{i \geq 1}$ et $(S_i^2)_{i \geq 1}$ les temps de séjour des processus Y_t , Y_t^1 et Y_t^2 respectivement, $(J_i)_{i \geq 1}$, $(J_i^1)_{i \geq 1}$ and $(J_i^2)_{i \geq 1}$ leurs instants de saut, et $(Z_i)_{i \geq 0}$, $(Z_i^1)_{i \geq 0}$ and $(Z_i^2)_{i \geq 0}$ leurs chaînes incluses. Remarquons que les chaînes incluses sont déterministes : $Z_n = k + 1 + n$, $Z_n^1 = n + 1$ et $Z_n^2 = n + k$.

Notre but est de vérifier que la chaîne incluse $(Z_i)_{i \geq 0}$ et les temps de séjour $(S_i)_{i \geq 1}$ ont la loi de ceux d'un processus de Yule. Puisque $(Z_i)_{i \geq 0}$ est déterministe, il suffit de vérifier que les temps de séjour $(S_i)_{i \geq 1}$ sont indépendants, exponentiels de paramètres $\lambda(k + n + 1)$ respectivement. Remarquons d'abord qu'il suffit de vérifier que, pour tout $s \geq 0$ et $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > s \mid S_1, \dots, S_n) = e^{-\lambda(k+n+1)s}. \quad (1)$$

En effet, en prenant l'espérance, on en déduit que S_{n+1} a la bonne loi, et il en découle également que S_{n+1} est indépendant de (S_1, \dots, S_n) , puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_{n+1})g(S_1, \dots, S_n)] &= \mathbb{E}\left[g(S_1, \dots, S_n)\mathbb{E}\left(f(S_{n+1}) \mid S_1, \dots, S_n\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_n)] \int_0^\infty f(x)\lambda(k+i+1)e^{-\lambda(k+i+1)x} dx \\ &= \mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_n)] \mathbb{E}[f(S_{n+1})]. \end{aligned}$$

1. Trivial par récurrence, puisque la convolée de deux densités de probabilité est une densité de probabilité.

Soit $n \geq 0$ fixé. À l'instant où Y_t touche $k+1+n$, c'est-à-dire en J_n , il existe $i_1, i_2 \geq 0$ tels que $Y_{J_n}^1 = i_1 + 1$ et $Y_{J_n}^2 = i_2 + k$, avec $i_1 + i_2 = n$. Remarquons que, pour de tels i_1 et i_2 fixés, on est dans la situation précédente si et seulement si $J_{i_1}^1 \vee J_{i_2}^2 < J_{i_1+1}^1 \wedge J_{i_2+1}^2$, ce qui est aussi équivalent à $J_n = J_{i_1}^1 \vee J_{i_2}^2$. Si nous montrons que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > s \text{ et } J_n = J_{i_1}^1 \vee J_{i_2}^2 \mid S_1, \dots, S_n) = e^{-\lambda(k+n+1)s} \mathbb{P}(J_n = J_{i_1}^1 \vee J_{i_2}^2 \mid S_1, \dots, S_n),$$

on en déduira (1) en sommant sur les (i_1, i_2) comme ci-dessus. De même, si on démontre

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > s \text{ et } J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1, \dots, S_n) = e^{-\lambda(k+n+1)s} \mathbb{P}(J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1, \dots, S_n)$$

et la relation similaire en remplaçant $J_n = J_{i_2}^2$ par $J_n = J_{i_1}^1$, le résultat en découlera.

Puisque, sur l'événement $\{J_n = J_{i_1}^1 \vee J_{i_2}^2\}$, les temps de saut J_1, \dots, J_n sont des fonctions de $S_1^1, \dots, S_{i_1}^1$ et $S_1^2, \dots, S_{i_2}^2$, on a

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > s \text{ et } J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1, \dots, S_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} > s \text{ et } J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2).$$

Finalement, il suffit donc de démontrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1} > s \text{ et } J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2) \\ = e^{-\lambda(k+n+1)s} \mathbb{P}(J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Or, sur l'événement $\{J_n = J_{i_2}^2\}$, $S_{n+1} = J_{n+1} - J_n = (J_{i_1}^1 + S_{i_1+1}^1) \wedge (J_{i_2}^2 + S_{i_2+1}^2) - J_{i_2}^2$. De plus, $\{J_n = J_{i_2}^2\} = \{J_{i_1}^1 < J_{i_2}^2 < J_{i_1}^1 + S_{i_1+1}^1\}$. Enfin, les temps d'arrêt $J_{i_1}^1$ et $J_{i_2}^2$ sont des fonctions de $S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2$, et les v.a. $S_{i_1+1}^1$ et $S_{i_2+1}^2$ sont indépendantes de $S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2$. Donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > s \text{ et } J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2) = F(J_{i_1}^1, J_{i_2}^2),$$

où

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \mathbb{P}(a + S_{i_1+1}^1 > s + b, S_{i_2+1}^2 > s \text{ et } a < b < a + S_{i_1+1}^1 + 1) \\ &= \mathbb{1}_{a < b} \mathbb{P}(S_{i_2+1}^2 > s) \mathbb{P}(S_{i_1+1}^1 > s + b - a) \\ &= \mathbb{1}_{a < b} e^{-\lambda(i_2+k)s} e^{-\lambda(i_1+1)(s+b-a)}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_n = J_{i_2}^2 \mid S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2) \\ = \mathbb{P}(J_{i_1}^1 < J_{i_2}^2 < J_{i_1}^1 + S_{i_1+1}^1 \mid S_1^1, \dots, S_{i_1}^1, S_1^2, \dots, S_{i_2}^2) = G(J_{i_1}^1, J_{i_2}^2), \end{aligned}$$

où

$$G(a, b) = \mathbb{P}(a < b < a + S_{i_1+1}^1) = \mathbb{1}_{a < b} e^{-\lambda(i_1+1)(b-a)}.$$

On a donc prouvé (2), et donc prouvé la question 2.

3. Vérifier comme dans la question précédente que le processus construit à partir des exponentielles E_j^i satisfait les propriétés de la caractérisation d'une CMTC par la loi de sa chaîne incluse et de ses temps de séjour.
4. Avec les notations du cours, l'équation forward est, pour $i \leq j$, $\dot{p}_{ij}(t) = -jp_{ij}(t) + (j-1)p_{i,j-1}(t)$, $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$. On obtient donc un système d'EDO triangulaire pour $(p_{1j}(t))_{j \geq 1}$, qui

peut se résoudre de proche en proche. Il y a donc unicité de la solution, et il suffit donc de vérifier à la main que la loi donnée est solution de ce système.

5. Pour toute fonction mesurable bornée f , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(E_{(1)}, E_{(2)} - E_{(1)}, \dots, E_{(n)} - E_{(n-1)}) &= n! \mathbb{E}[f(E_1, E_2 - E_1, \dots, E_n - E_{n-1}); E_1 \leq \dots \leq E_n] \\ &= n! \int_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n} f(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) e^{-\sum_k x_k} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(y_1, y_2, \dots, y_n) \prod_{k=1}^n k e^{-k y_{n+1-k}} dy_1 \dots dy_n, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue par changement de variable.

6. Puisque les temps de séjour S_1, S_2, \dots de Y_t sont $\text{Exp}(1), \text{Exp}(2), \dots$, on a

$$\mathbb{P}(Y_t \geq n) = \mathbb{P}(E_{(n)} - E_{(n-1)} + \dots + E_{(2)} - E_{(1)} + E_{(1)} \leq t) = \mathbb{P}(E_{(n)} \leq t) = [\mathbb{P}(E_1 \leq t)]^n = (1 - e^{-t})^n.$$

Exercice 5

1. a) Soit J_1 le premier temps de saut du PNM. On peut écrire T_j comme $J_1 + (T_j - J_1)$, où J_1 est \mathcal{F}_{J_1} -mesurable et $T_j - J_1$ ne dépend que de la trajectoire de X_t après J_1 . La propriété de Markov au temps J_1 donne donc

$$\begin{aligned} t_j^i &= \mathbb{E}_i[J_1 + \mathbb{E}_x(T_j - J_1 \mid \mathcal{F}_{J_1})] = \mathbb{E}_i[J_1 + \mathbb{1}_{\{X_{J_1}=i+1\}} \mathbb{E}_{i+1}(T_j) + \mathbb{1}_{\{X_{J_1}=i-1\}} \mathbb{E}_{i-1}(T_j)] \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} t_j^{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} t_j^{i-1}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que $J_1 \sim \text{Exp}(\lambda_i + \mu_i)$ et $\mathbb{P}_i(X_{J_1} = i + 1) = \lambda_i / (\lambda_i + \mu_i)$. On obtient la relation donnée après quelques réarrangements.

Puisque $\mu_1 = 0$, la relation précédente donne $t_j^1 - t_j^2 = 1/\lambda_1$, et on a clairement $t_j^i = 0$.

b) Soit $u_j^i = t_j^i - t_j^{i+1}$. La question précédente donne une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{j-1})$. Puisque $u_j^1 = t_j^1 - t_j^2$ est connue, les valeurs de u_j^i sont uniquement caractérisées par les relations précédentes. Puisque

$$t_j^i - t_j^j = u_j^i + u_j^{i+1} + \dots + u_j^{j-1},$$

la valeur de t_j^j permet de plus de caractériser toute la suite $(t_j^i)_{1 \leq i \leq j}$.

c) On vérifie facilement que la formule donnée satisfait les trois propriétés de la question précédentes. Comme ces propriétés caractérisent la suite t_j^i , la formule donnée pour t_j^i est prouvée.

d) Soit $T_\infty = \lim_{j \rightarrow +\infty} T_j$. Comme la suite T_j est croissante (le PNM ne peut bouger que de ± 1 et doit donc passer par tous les entiers avant de tendre vers l'infini), on a en fait $T_\infty = \sup_{j \geq i} T_j$. D'après le cours, tous les T_j sont finis presque sûrement. Donc, d'après la définition du cours, T_∞ est le temps d'explosion du PNM. Par convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}_i(T_\infty) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_i(T_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} t_j^i \leq R$$

d'après la question précédente. Donc, si $R < \infty$, $\mathbb{E}_i(T_\infty) < \infty$ et donc $T_\infty < \infty$ p.s.

- 2. a)** L'inégalité recherchée exprime le fait qu'il faut plus de temps pour relier i à $j > i$ que pour relier $i + 1$ à j . Une manière d'exprimer ceci rigoureusement est d'utiliser la propriété de Markov en T_{i+1} :

$$1 - s_j^i = \mathbb{E}_i(e^{-T_j}) = \mathbb{E}_i[e^{-T_{i+1}} \mathbb{E}_{i+1}(e^{-T_j})] = \mathbb{E}_i(e^{-T_{i+1}})(1 - s_j^{i+1}).$$

On obtient l'inégalité $s_j^i \geq s_j^{i+1}$ en utilisant l'inégalité $e^{-T_{i+1}} \leq 1$.

On a trivialement $s_i^i = 0$ et $s_2^1 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} = \frac{1}{\lambda_1 + 1}$, car T_2 suit la loi exponentielle de paramètre λ_1 sous \mathbb{P}_1 , et que la transformée de Laplace d'une exponentielle de paramètre λ est $\alpha \mapsto \lambda/(\lambda + \alpha)$.

- b)** La propriété de Markov en T_2 donne $\mathbb{E}_1(e^{-T_\infty}) = \mathbb{E}_1(e^{-T_2})\mathbb{E}_2(e^{-T_\infty}) = (1 - s_2^1)\mathbb{E}_2(e^{-T_\infty})$. On obtient donc par récurrence que, pour tout $i \geq 1$,

$$\mathbb{E}_1(e^{-T_\infty}) = (1 - s_2^1)(1 - s_3^2) \dots (1 - s_{i+1}^i)\mathbb{E}_{i+1}(e^{-T_\infty}) \leq (1 - s_2^1)(1 - s_3^2) \dots (1 - s_{i+1}^i).$$

En prenant la limite quand $i \rightarrow +\infty$ de l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbb{E}_1(e^{-T_\infty}) \leq \prod_{i \geq 1} (1 - s_{i+1}^i).$$

Le critère de divergence d'un tel produit infini est $\sum_i s_{i+1}^i = \infty$ (passer au log et utiliser le fait qu'une série est convergente ssi une série de terme général équivalent au terme général de la première est convergente). Dans le cas d'un produit de nombre dans $[0, 1[$, la divergence du produit infini signifie que le produit infini vaut 0.

- c)** La propriété de Markov en T_i donne

$$\mathbb{E}_1(e^{-T_\infty}) \leq \mathbb{E}_i(e^{-T_\infty}) \leq \mathbb{E}_i(e^{-T_j})$$

puisque $T_j \leq T_\infty$ p.s. sous \mathbb{P}_i . On obtient donc $1 - s_j^i \geq \mathbb{E}_1(e^{-T_\infty})$, qui est strictement positif sous l'hypothèse que $\mathbb{P}_1(T_\infty < \infty) > 0$.

- d)** Par un calcul très similaire à la question **1.a)**, on obtient

$$\lambda_i(s_j^i - s_j^{i+1}) + \mu_i(s_j^i - s_j^{i-1}) = 1 - s_j^i.$$

En comparant avec la relation de la question **1.a)**, dont on sait qu'une solution est donnée par la question **1.c)**, on obtient que

$$\lambda_i r_i - \mu_i r_{i-1} = 1 - s_j^i - \beta \geq 0$$

d'après la question précédente.

- e)** On obtient la relation demandée en appliquant la relation de récurrence de la question précédente pour $i = 1$. Le fait que $r_1 \geq 0$ est alors une conséquence immédiate de la question **c)**.

- f)** On obtient alors trivialement par récurrence que $r_i \geq 0$ pour tout $i \geq 1$. En utilisant le fait que $s_j^j = 0$, la relation $r_{j-1} \geq 0$ entraîne l'inégalité demandée. Puisqu'on a supposé $R = \infty$, on en déduit que $\sum_i s_{i+1}^i = \infty$. D'après la question **b)**, ceci implique que $\mathbb{P}_1(T_\infty < \infty) = 0$ et donne la contradiction cherchée. On en déduit que $R = \infty$ implique que $\mathbb{P}_1(T_\infty = \infty) = 1$, ce qui constitue la réciproque de la question **1**.

- 3.** On vérifie facilement qu'aucun de ces processus n'est explosif.