Chaînes de Markov en temps continu et génétique des populations.

Correction de la feuille 2 — 2014–2015

Nicolas Champagnat

Exercice 6 (correction de la preuve du TCL — question 3. — seulement)

a) En posant $c_n = \sqrt{3n}$ et $a_n = \sqrt{3n^3}$, on calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{itZ_n}) &= e^{-itc_n} \prod_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[e^{-ita_n T_k \cdot /2} = e^{-itc_n} \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{ita_n}{k(k-1)}\right)^{-1} \\
&= e^{-itc_n} \exp\left[\sum_{k\geqslant n+1} \log\left(1 + \frac{ita_n}{k(k-1)} - \frac{t^2 a_n^2}{k^2(k-1)^2} + O(a_n^3 k^{-6})\right)\right] \\
&= e^{-itc_n} \exp\left[\sum_{k\geqslant n+1} \left(\frac{ita_n}{k(k-1)} - \frac{t^2 a_n^2}{2k^2(k-1)^2} + O(a_n^3 k^{-6})\right)\right] \\
&= e^{-itc_n} e^{ita_n/n} \exp\left(-\frac{t^2}{2} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{3n^3}{k^2(k-1)^2} + O(n^{-1/2})\right) \to \exp(-t^2/2),
\end{aligned}$$

qui est bien la fonction caractéristique d'une gaussienne centrée réduite.

b) La première convergence n'est pas immédiate car la convergence en loi n'implique a priori que la convergence de l'espérance de fonction continues de Z_n (ici, c'est une fonction indicatrice). Cependant, lorsque la loi limite n'a pas de masse de Dirac en $\{a\}$, la propriété demandée s'obtient facilement en utilisant des approximations continues de la fonction indicatrice : soit φ et ψ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\varphi(x) \leqslant \mathbb{1}_{x\leqslant a} \leqslant \psi(x)$. On a alors $\mathbb{E}(\varphi(Z_n)) \to \mathbb{E}(\varphi(G))$ où G est une v.a. gaussienne centrée réduite, et de même pour ψ. On en déduit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leqslant \liminf_n \mathbb{P}(Z_n \leqslant a) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Le résultat demandé s'obtient en faisant converger φ et ψ vers $\mathbb{1}_{]-\infty,a]}$.

La seconde convergence demandée découle facilement de la formule définissant Z_n.

c) Puisque R_t est un processus décroissant, en notant n pour $n(t,a)$, on a

$$\mathbb{P}\left(R_{\frac{2}{n-1}+\frac{2a}{\sqrt{3}(n-1)^{3/2}}} \leqslant n\right) \leqslant \mathbb{P}(R_t \leqslant n) \leqslant \mathbb{P}\left(R_{\frac{2}{n}+\frac{2a}{\sqrt{3}n^{3/2}}} \leqslant n\right).$$

La question précédente montrer que les membres de droite et de gauche convergent vers la même limite $\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2.2}dx/\sqrt{2\pi}$.

d) Par définition de $n(t,a)$, on a premièrement $n(t,a) \sim 2/t$ quand $t \to 0$. En réinjectant cette première estimation de $n(t,a)$ dans la définition de $n(t,a)$, on obtient

$$\frac{2}{n(t,a)}\left(1+\frac{a}{\sqrt{6/t}}(1+o(1))\right) \leqslant t \leqslant \frac{2}{n(t,a)-1}\left(1+\frac{a}{\sqrt{6/t}}(1+o(1))\right),$$

ce qui se réécrit

$$\frac{2}{t}+a\sqrt{\frac{2}{3t}}+o(t^{-1/2}) \leqslant n(t,a) \leqslant 1+\frac{2}{t}+a\sqrt{\frac{2}{3t}}+o(t^{-1/2}),$$

comme demandé.

e) En injectant cette estimée dans le résultat de la question précédente, on obtient que, pour tout a

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{6}{t}}\left(\frac{tR_t}{2}-1\right) \leqslant a+o(1)\right) \to \int_{-\infty}^{a}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx,$$

pour un certain $o(1)$ qui peut dépendre de a. On en déduit alors que

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{6}{t}}\left(\frac{tR_t}{2}-1\right) \leqslant a\right) \to \int_{-\infty}^{a}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

en utilisant le fait que, pour tout $a' < a < a''$,

$$\mathbb{1}_{]-\infty,a']} \leqslant \mathbb{1}_{]-\infty,a+o(1)]} \leqslant \mathbb{1}_{]-\infty,a'']}$$

pour t assez petit, puis en faisant tendre a' et a'' vers a.

Exercice 7

1. On a

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} jQ_j = n\right) = \sum)k_1,\ldots,k_n,\ \sum jk_j = n\prod_{j=1}^{n} e^{-\theta/j}\frac{(\theta/j)^{k_j}}{k_j!}$$
$$= e^{-\theta\sum 1/j}\sum_{k\geqslant 0}\theta^k \sum_{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0,\ \sum k_j=k,\ \sum jk_j=n}\ \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{k_j}k_j!}.$$

2. Il suffit de développer $\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)$ par rapport au terme $(\theta+n-1)$.

3. Parmi les permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$, il y a celles telles que $\sigma(n) = n$ et les autres.

Si $\sigma(n) = n$, alors la restriction de σ à $\{1,\ldots,n-1\}$ appartient à $\mathcal{S}_{n-1}$ et a un cycle de moins. Réciproquement, à tout $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ on peut associer un unique $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma(n) = n$ et la restriction de σ à $\{1,\ldots,n-1\}$ est σ', et σ a un cycle de plus que σ'.

Si $\sigma(n) = n$, alors on peut construire $\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}$ à partir de σ en “sautant” n comme suit

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } \sigma(i) \neq n \\ \sigma^2(i) & \text{si } \sigma(i) = n, \end{cases}$$

et σ' a le même nombre de cylces que σ. Réciproquement, si $\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}$, on peut construire $n-1$ permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que σ' s'obtienne en “sautant” n dans σ comme ci-dessus. Ces permutations σ s'obtiennent en “intercalant” n entre i et $\sigma'(i)$ pour n'importe-quel $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ comme suit

$$\sigma(j) = \begin{cases} \sigma'(j) & \text{si } j \neq i \\ n & \text{si } j = i \\ \sigma'(i) & \text{si } j = n. \end{cases}$$

On en déduit donc que $s'(n,k) = s'(n-1,k-1) + (n-1)s'(n-1,k)$.

Puisque $s'(1,1) = 1 = s(1,1)$, $s'(n,1) = (n-1)! = s(n,1)$ et $s'(n,n) = 1 = s(n,n)$, la relation de récurrence précédente montre que $s(n,k) = s'(n,k)$ pour tout $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. On peut calculer $s'(n,k)$ d'une autre manière :

— en énumérant toutes les valeurs possibles de $k_1, \ldots, k_n$, où k_j est le nombre de cycles de longueur j d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$;

— puis en choisissant la partition $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de $\{1, \ldots, n\}$, où A_j est l'ensemble des entiers de $\{1, \ldots, n\}$ faisant partie d'un cycle de longueur j de σ (d'après les coefficients multinomiaux, il y a $\frac{n!}{\prod_{j=1}^n (jk_j)!}$ possibilités) ;

— puis en choisissant le nombre de manière de répartir les jk_j éléments de A_j dans k_j cycles de longueur j (d'après les coefficients multinomiaux, il y a $\frac{(jk_j)!}{(j!)^{k_j}}$ possibilités, lorsque l'on ordonne les k_j cycles de longueur j ; puisqu'ici on ne doit pas tenir compte de l'ordre, il faut en plus diviser par $k_j!$) ;

— enfin, pour chacun des ensembles de j indices choisis pour faire un cycle de longueur j, il y a $(j-1)!$ façon de faire un tel cycle avec ces entiers.

On arrive donc à la formule suivante, où chaque terme entre crochets correspond à une étape précédente :

$$\begin{aligned} s(n,k) &= \sum_{k_1, \ldots, k_n, \sum k_j = k, \sum jk_j = n} \left[\frac{n!}{\prod_{j=1}^n (jk_j)!} \right] \prod_{j=1}^n \left\{ \left[\frac{(jk_j)!}{(j!)^{k_j}} \frac{1}{k_j!} \right] \left[((j-1)!)^{k_j} \right] \right\} \\ &= n! \sum_{k_1, \ldots, k_n \geqslant 0, \sum k_j = k, \sum jk_j = n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{k_j} k_j!} = n! \alpha(n,k). \end{aligned}$$

5. On a prouvé que

$$n! \sum_{k=1}^n \alpha(n,k) \theta^k = \theta(\theta+1) \ldots (\theta+n-1).$$

La question **1.** permet donc d'obtenir la formule souhaitée.