Introduction à la finance quantitative
Correction des exercices

N. Champagnat, IECN et INRIA

Exercice 1 : $k = 3$, $N = 2$, $r = 0$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

Montrer qu'il existe une stratégie dominante et que la loi du prix unique prévaut.

Correction : On peut montrer l'existence d'une stratégie dominante de deux manières :

1. En trouvant une stratégie explicite H telle que $V_0 = 0$ et $V_1 > 0$.
2. En montrant qu'il n'existe pas de mesure de pricing.

Première méthode : on observe que $S_1(t) - S_2(t)$ est strictement croissant pour tous les scenarios. Ceci conduit à une stratégie dominante de la forme $H = (x, 1, -1)$, où x est à choisir de telle sorte que $V_0 = 0$. On trouve $x = 3$, et on vérifie effectivement que, pour $H = (3, 1, -1)$, on a bien $V_1 > 0$ pour tous les scenarii.

Deuxième méthode : $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est une mesure de pricing si $\pi_i \geq 0$ pour tout i, $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ et $S_n^*(0) = \sum_{i=1}^{3} \pi_i S^*(1)(\omega_i)$ pour $n = 1$ et 2. Puisque $r = 0$, le prix sont déjà actualisés, et on obtient directement le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & = 1 \\ 8\pi_1 & +6\pi_2 & +3\pi_3 & = 4 \\ 10\pi_1 & +8\pi_2 & +4\pi_3 & = 7 \end{array}\right.$$

La résolution de ce système par pivot de Gauss donne

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & = 1 \\ 5\pi_1 & +3\pi_2 & & = 1 \\ 6\pi_1 & +4\pi_2 & & = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & = 1 \\ 5\pi_1 & +3\pi_2 & & = 1 \\ -\frac{2}{3}\pi_1 & & & = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

On trouve $\pi_1 < 0$, ce qui est incompatible avec la définition de la mesure de pricing. Le Résultat 3 du cours donne alors le résultat.

Pour obtenir la loi du prix unique, il suffit de montrer que toute valeur terminale du portefeuille est obtenue par au plus une seule stratégie d'investissement. Soit $X = (x_1, x_2, x_3)$ quelconque. On cherche $H = (H_0, H_1, H_2)$ tel que pour tout $i = 1, 2$ ou 3,

$$V_1(\omega_i) = x_i.$$

Ceci conduit au système

$$\begin{cases} H_0 & +8H_1 & +10H_2 & = x_1 \\ H_0 & +6H_1 & +3H_2 & = x_2 \\ H_0 & +3H_1 & +4H_2 & = x_3 \end{cases}$$

Le pivot de Gauss donne

$$\begin{cases} & +5H_1 & +6H_2 & = x_1 - x_3 \\ & +3H_1 & -H_2 & = x_2 - x_3 \\ H_0 & +3H_1 & 4H_2 & = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & +23H_1 & & = x_1 - x_3 + 6(x_2 - x_3) \\ & +3H_1 & -H_2 & = x_2 - x_3 \\ H_0 & +3H_1 & 4H_2 & = x_3 \end{cases}$$

Inutile d'écrire la solution, on voit qu'il n'y en a qu'une seule, ce qui montrer que la loi du prix unique est vraie.

Exercice 2 : $k = 2$, $N = 1$ et $r = 1/9$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
0	1	10/9	10/9
1	5	20/3	40/9

On considère le call européen de strike $K = 5$. Son payoff est donné par :

$$X = (S_1(1) - K)_+ := \max\{0, S_1(1) - K\},$$

soit

	ω_1	ω_2
X	5/3	0

Montrer que X est duplicable à l'aide de la stratégie d'investissement $H = (-3, 0.75)$. Montrer que le prix du contrat est égal à 0.75 Euro.

Correction : On doit vérifier que $V_1 = H_0 S_0(1) + H_1 S_1(1) = X$ pour tous les scenarii. On trouve effectivement $V_1(\omega_1) = -3\frac{10}{9} + 0,75 \times \frac{20}{3} = \frac{5}{3}$ et $V_1(\omega_2) = -3\frac{10}{9} + 0,75 \times \frac{40}{9} = 0$.

Le prix de l'option est alors $V_0 = H_0 S_0(0) + H_1 S_1(0) = -3 + 0,75 \times 5 = 0,75$.

On peut retrouver ce résultat avec la formule du prix

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0(1)}] = \mathbb{Q}(\omega_1)\frac{X(\omega_1)}{S_0(1)} + \mathbb{Q}(\omega_2)\frac{X(\omega_2)}{S_0(1)}.$$

En utilisant la probabilité risque neutre $\mathbb{Q} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ calculée dans les notes de cours, on trouve le même résultat.

Exercice 3 : Le 2 septembre 2004 le prix de cloture de l'action Kellogg était à 41.78 \$. Pour 2.60 \$ vous pouviez acheter une option d'achat de l'action Kellogg avec un prix d'exercice de 40 \$. L'option expirait le 17 décembre 2004.
a) Quel droit vous donne cette option ?
b) Supposons que vous ayez acheté un call et que vous l'ayez conservé jusqu'à la maturité. Si le prix de l'action Kellogg était de 52 \$ le 17 décembre 2004, auriez-vous exercé votre option ? Quel aurait été votre bénéfice ?
c) Si le prix de l'action Kellogg était de 38 \$ le 17 décembre 2004, auriez-vous exercé votre option ? Quel aurait été votre bénéfice ?

Correction : a) Le droit d'acheter une action Kellogg le 17 décembre 2004 au prix de 40 \$.

b) Oui. Le bénéfice est alors de $52\ \$ - 40\ \$ - 2,60\ \$ = 9,40\ \$$ (ne pas oublier de compter le prix payé initialement par le détenteur de l'option).

c) Non. Le bénéfice est alors de $-2,60$ \$.

Exercice 4 : Calculer le prix d'un put européen de strike $K = 5$ sur le modèle de l'exercice 2.

Correction : Le payoff d'une telle option est $X = (K - S_1(1))_+$, soit

	ω_1	ω_2
X	0	$\frac{5}{9}$

Comme il existe une unique probabilité risque neutre, le marché est complet et donc le payoff et replicable, et son prix est donné par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0(1)}] = \mathbb{Q}(\omega_1)\frac{X(\omega_1)}{S_0(1)} + \mathbb{Q}(\omega_2)\frac{X(\omega_2)}{S_0(1)} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{4}.$$

La stratégie de couverture est la solution $H = (H_0, H_1)$ du système donné par l'équation $V_1 = X$:

$$\begin{cases} \frac{10}{9}H_0 & +\frac{20}{3}H_1 & = 0 \\ \frac{10}{9}H_0 & +\frac{40}{9}H_1 & = \frac{5}{9} \end{cases}$$

En multipliant tout par 9/10, on obtient

$$\begin{cases} H_0 & +6H_1 & = 0 \\ H_0 & +4H_1 & = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & +2H_1 & = -\frac{1}{2} \\ H_0 & +4H_1 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient $H = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$. C'est la stratégie de couverture. On peut vérifier le calcul en remarquant qu'on a bien $V_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times 5 = \frac{1}{4}$ comme obtenu plus haut.

Exercice 5 : parité call-put Soit C le prix de l'option d'achat et P le prix de l'option de vente. Montrer que

$$C - P = S_1(0) - \frac{K}{1+r}$$

si les deux options sont duplicables. Montrer l'assertion suivante : soit les deux options sont duplicables soit aucune des deux options ne l'est.

Correction : On remarque d'abord que cette relation est vérifiée par les prix calculés dans les exercices 2 et 4.

La formule de parité call-put est indépendante du modèle et du strike. Elle se démontre comme suit : pour le call,

$$C = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_0(1)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_1(1) - K)^+}{S_0(1)}\right]$$

et pour le put,

$$P = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K - S_1(1))^+}{S_0(1)}\right]$$

En utilisant la relation $(x)^+ - (-x)^+ = x$, on obtient

$$C - P = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_1(1)-K)^+ - (K - S_1(1))^+}{S_0(1)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1(1)-K}{S_0(1)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^*(1)] - \frac{K}{1+r}.$$

Le résultat demandé est alors une conséquence de la définition d'une probabilité risque neutre.

La deuxième partie de l'exercice sera prouvée si on montre que, lorsqu'un call (ou un put) est duplicable, alors le put (ou le call) de même strike est forcément duplicable aussi. Soit H une stratégie duplicant le call. On pose alors

$$\hat{H} = H + \left(\frac{K}{1+r}, -1\right).$$

La richesse terminale correspondant à ce portefeuille est

$$\hat{V}_1 = V_1 + \frac{K}{1+r}S_0(1) - S_1(1) = (S_1(1)-K)^+ - (S_1(1)-K) = (K - S_1(1))^+,$$

où la dernière égalité vient de la relation $(x)^+ - (-x)^+ = x$ déjà utilisée. On a donc bien trouvé une stratégie qui replique le payoff du put, et la question est résolue. De nouveau, on remarque que ce résultat est indépendent du modèle considéré (tant qu'il y a une probabilité risque neutre) et de la valeur du strike.

Exercice 6 : Soit $T = 12$ correspondant à une année, les périodes représentant les différents mois. Calculer l'intérêt équivalent qui s'applique sur chaque période pour obtenir un intéret annuel de 12 %.

Correction : On cherche le rendement r constant sur chaque mois de telle sorte que le rendement total sur l'année vaut 12 %. On doit donc résoudre l'équation

$$(1+r)^{12} = 1,12 \quad \Leftrightarrow \quad r = (1,12)^{1/12} - 1 \approx 0,949\ \%.$$

On remarque que ceci ne revient pas à diviser le rendement total par le nombre de périodes.

Exercice 7 : Tracer le graphique des prix et calculer les valeurs et gains du portefeuille dans la situation suivante : le rendement de l'actif sans risque est constant égal à $r = 1/4$ et $S_0(0) = 1$. En ce qui concerne l'actif risqué :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	8
ω_2	5	7	8
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Il s'agit d'un modèle à deux périodes, sur la première période l'investisseur utilise la stratégie $H(1) = (4, -2)$, sur la seconde période il utilise $H(2) = (-4, 1)$.

Correction : On laisse en exercice le dessin du graphe des prix. On a

$$V_0 = H_0(1)S_0(0) + H_1(1)S_1(0) = 4 - 2 \times 5 = -6,$$

$$V_1 = H_0(1)S_0(1) + H_1(1)S_1(1) = \begin{cases} 4(1+r) - 2 \times 8 = -11 & \text{sur } \omega_1 \\ 4(1+r) - 2 \times 7 = -9 & \text{sur } \omega_2 \\ 4(1+r) - 2 \times 4 = -3 & \text{sur } \omega_3,\ \omega_4 \end{cases}$$

$$V_2 = H_0(2)S_0(2) + H_1(2)S_1(2) = \begin{cases} -4(1+r)^2 + 8 = \frac{7}{4} & \text{sur } \omega_1,\ \omega_2 \\ -4(1+r)^2 + 6 = -\frac{1}{4} & \text{sur } \omega_3 \\ -4(1+r)^2 + 3 = -\frac{13}{4} & \text{sur } \omega_4 \end{cases}$$

On calcule également les gains

$$G_1 = H_0(1)\Delta S_0(1) + H_1(1)\Delta S_1(1) = \begin{cases} 4r - 2 \times 3 = -5 & \text{sur } \omega_1 \\ 4r - 2 \times 2 = -3 & \text{sur } \omega_2 \\ 4r - 2 \times (-1) = 3 & \text{sur } \omega_3,\ \omega_4 \end{cases}$$

$$G_2 = G_1 + H_0(2)\Delta S_0(2) + H_1(2)\Delta S_1(2) = \begin{cases} -5 - 4(1+r)r + 1 \times 0 = -\frac{25}{4} & \text{sur } \omega_1 \\ -3 - 4(1+r)r + 1 \times 1 = -\frac{13}{4} & \text{sur } \omega_2 \\ 3 - 4(1+r)r + 1 \times 2 = \frac{15}{4} & \text{sur } \omega_3 \\ 3 - 4(1+r)r + 1 \times (-1) = \frac{3}{4} & \text{sur } \omega_4 \end{cases}$$

On remarque que les gains ne sont pas égaux aux différences de valeurs de portefeuille, donc la stratégie utilisée n'est pas autofinancée.

Exercice 8 : Modifier la stratégie d'investissement sur la seconde période dans l'exercice précédent pour obtenir une stratégie autofinancée. Calculer alors le nouveau gain du portefeuille.

Correction : Puisque $V_1(\omega_1) = -11$, $V_1(\omega_2) = -9$ et $V_1(\omega_3) = V_1(\omega_4) = -3$, on peut par exemple choisir

$$H(2) = (H_0(2), H_1(2)) = \begin{cases} (-\frac{3}{1+r}, -1) & \text{sur } \omega_1 \\ (-\frac{2}{1+r}, -1) & \text{sur } \omega_2 \\ (\frac{1}{1+r}, -1) & \text{sur } \omega_3,\ \omega_4 \end{cases}$$

ou

$$H(2) = (H_0(2), H_1(2)) = \begin{cases} (0, -\frac{11}{8}) & \text{sur } \omega_1 \\ (0, -\frac{9}{7}) & \text{sur } \omega_2 \\ (0, -\frac{3}{4}) & \text{sur } \omega_3,\ \omega_4 \end{cases}$$

Par exemple pour le premier choix, le gain devient

$$G_2 = G_1 + H_0(2)\Delta S_0(2) + H_1(2)\Delta S_1(2) = \begin{cases} -5 - 3r - 1 \times 0 = -\frac{23}{4} & \text{sur } \omega_1 \\ -3 - 2r - 1 \times 1 = -\frac{9}{2} & \text{sur } \omega_2 \\ 3 + r - 1 \times 2 = \frac{5}{4} & \text{sur } \omega_3 \\ 3 + r - 1 \times (-1) = \frac{17}{4} & \text{sur } \omega_4 \end{cases}$$

On peut également calculer

$$V_2 = H_0(2)S_0(2) + H_1(2)S_1(2) = \begin{cases} -3(1+r) - 8 = -\frac{47}{4} & \text{sur } \omega_1 \\ -2(1+r) - 8 = -\frac{21}{2} & \text{sur } \omega_2 \\ (1+r) - 6 = -\frac{19}{4} & \text{sur } \omega_3 \\ (1+r) - 3 = -\frac{7}{4} & \text{sur } \omega_4 \end{cases}$$

Puisque $V_0 = -6$, on vérifie alors que $G_2 = V_2 - V_0$, comme il se doit pour une stratégie autofinancée.

Exercice 9 : On considère un modèle à deux périodes, à 5 scenarii et dont le rendement de l'actif sans risque vaut $r = 0$. Ce modèle comporte un seul actif risqué

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	6	5	3
ω_2	6	5	4
ω_3	6	5	8
ω_4	6	7	6
ω_5	6	7	8

Déterminer l'ensemble des probabilités risque neutre.

Correction : Remarquons tout d'abord que $r = 0$, donc les prix des actifs sont déjà actualisés.

Une probabilité risque neutre $\mathbb{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ est caractérisée par les relations $q_i > 0$, $q_1 + \ldots + q_5 = 1$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^*(1)] = S_1^*(0)$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^*(2) \mid S_1^*(1)] = S_1^*(1)$. On voit que cette dernière relation correspond en fait à 2 équation distinctes, correspondant aux deux valeurs possibles de $S_1^*(1)$: on doit en fait vérifier

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^*(2) \mid S_1^*(1) = 5] = 5, \quad \text{(pour les scénarii } \omega_1,\ \omega_2 \text{ et } \ \omega_3) \\ &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^*(2) \mid S_1^*(1) = 7] = 7, \quad \text{(pour les scénarii } \omega_4 \text{ et } \ \omega_5), \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbb{Q}(\omega_i) S_1^*(2)(\omega_i) = 5\ \mathbb{Q}(S_1^*(1) = 5)$$

$$\sum_{i=4}^{5} \mathbb{Q}(\omega_i) S_1^*(2)(\omega_i) = 7\ \mathbb{Q}(S_1^*(1) = 5)$$

On obtient finalement le système à 5 inconnues

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrl} q_1 & +q_2 & +q_3 & +q_4 & +q_5 & = 1 \\ 5q_1 & +5q_2 & +5q_3 & +7q_4 & +7q_5 & = 6 \\ -2q_1 & -q_2 & +3q_3 & & & = 0 \\ & & & -q_4 & +q_5 & = 0 \end{array} \right.$$

La méthode qui suit est générale et s'applique à tous les systèmes pour les probabilités risque neutre dans les modèles multi-périodes.

On commence par poser $x = q_1 + q_2 + q_3$ et $y = q_4 + q_5$. Les deux premières équations du système donnent alors

$$\begin{cases} x & +y & = 1 \\ 5x & +7y & = 6 \end{cases}$$

qui donne $x = y = \frac{1}{2}$. Les deux autres équations du système permettent d'obtenir deux sous-systèmes séparés, pour les variables q_1, q_2, q_3 pour le premier, et q_4, q_5 pour le second :

$$\begin{cases} q_1 & +q_2 & +q_3 & = \frac{1}{2} \\ -2q_1 & -q_2 & 3q_3 & = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_4 & +q_5 & = \frac{1}{2} \\ -q_4 & +q_5 & = 0 \end{cases}$$

Le second système est trivial et a pour unique solution $q_4 = q_5 = \frac{1}{4}$. Le premier système a une inconnue de trop. Sa résolution par pivot de Gauss donne par exemple

$$\begin{cases} q_1 & +q_2 & +q_3 & = \frac{1}{2} \\ -q_1 & & 4q_3 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On voit qu'on peut alors donner une valeur arbitraire λ à q_3 et obtenir les solution $q_1 = 4\lambda - \frac{1}{2}$ et $q_2 = \frac{1}{2} - q_1 - q_3 = 1 - 5\lambda$. Il reste à vérifier quelles solutions ont toutes leurs coordonnées positives : on a $q_1 > 0$ ssi $\lambda > 1/8$ et $q_2 > 0$ ssi $\lambda < 1/5$.

On obtient donc une infinité de probabilités risque neutre données par

$$\mathbb{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = \left(4\lambda - \frac{1}{2},\ 1 - 5\lambda,\ \lambda,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right), \qquad \forall \lambda \in \left]\frac{1}{8}, \frac{1}{5}\right[.$$

Exercice 10 : On considère un modèle à deux actifs, un actif sans risque de rendement $r = 0$ et un actif risqué décrit par :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Il est démontré dans les notes de cours que ce modèle admet une unique probabilité risque neutre $\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Calculer le prix d'une option de vente pour un strike $K = 6$ à la date $t = 0$ et $t = 1$.

Correction : Le payoff d'un put de strike K sur le sous-jacent $S_1(t)$ et d'échéance $t = 2$ est donné par $X = (K - S_1(2))^+$. On obtient donc

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
X	0	0	0	3

Puisqu'il existe une unique probabilité risque neutre, tout payoff est replicable et donc le théorème de valorisation des actifs s'applique. Le prix du put à la date 0 est donc

$$V_0 = V_0^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_0(2)}\right] = \mathbb{Q}(\omega_4)\frac{3}{1} = \frac{3}{2}.$$

Le prix du put à la date $t = 1$ dépend de la valeur du sous-jacent à la date 1 :

$$V_1 = S_0(1) \times V_1^* = V_1^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_0(2)} \mid S_1(1)\right] = \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X \mid S_1(1) = 8\right] & \text{sur } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X \mid S_1(1) = 4\right] & \text{sur } \omega_3 \text{ et } \omega_4 \end{cases}$$

On obtient donc

$$V_1 = \begin{cases} \frac{q_1 \times 0 + q_2 \times 0}{q_1+q_2} = 0 & \text{sur } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \\ \frac{q_3 \times 0 + q_4 \times 3}{q_3+q_4} = 2 & \text{sur } \omega_3 \text{ et } \omega_4 \end{cases}$$

Exercice 11 : On considère un modèle de prix avec 2 actifs : un risqué et un sans risque. Ce modèle comporte deux périodes et 5 scenarii. Le rendement de l'actif sans risque est nul. Les prix de l'actif risqué sont :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	4	5	6
ω_2	4	5	3
ω_3	4	2	6
ω_4	4	2	3
ω_5	4	2	1

Ce modèle est sans opportunité d'arbitrage mais il est incomplet, en effet on peut vérifier qu'il existe une infinité de probabilités risque neutre.

Dans ce modèle, on considère un contrat financier de payoff suivant :

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
X	4	3	4	3	2

Donner un encadrement du prix de ce contrat financier.

Correction : Dans un marché incomplet, la fourchette de prix est déterminée par la plus petite richesse initiale pour laquelle il exite une stratégie d'investissement donnant une valeur terminale plus grande que X, et la plus grande richesse initiale pour laquelle il existe une stratégie d'investissement donnant une valeur terminale plus petite que X.

Il faut procéder en remontant le temps : peut-on trouver une stratégie qui duplique le payoff sur la période $[1,2]$ et sur les événements $\{\omega_1, \omega_2\}$? Même question sur $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$? A cause des contraintes portant sur l'information disponible à la date 1, remarquons que $H(2) = (H_0(2), H_1(2))$ doit prendre la même valeur sur les scenarii ω_1, ω_2, et la même valeur sur les scenarii $\omega_3, \omega_4, \omega_5$. Sur les deux premiers scenarii, la duplication du payoff s'écrit

$$\begin{cases} H_0(2) & +6H_1(2) & = 4 \\ H_0(2) & +3H_1(2) & = 3 \end{cases}$$

On obtient une unique solution $H(2) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$, qui donne une valeur de portefeuille $V_1 = \frac{11}{3}$ à la date $t = 1$. Jusqu'ici, pas de problème d'incomplétude du marché.

L'incomplétude du marché se voit dans le second système, qui a 3 équations pour 2 inconnues. On cherche donc une solution donnant une valeur terminale du portefeuille supérieure au payoff :

$$\begin{cases} H_0(2) & +6H_1(2) & \geq 4 \\ H_0(2) & +3H_1(2) & \geq 3 \\ H_0(2) & +H_1(2) & \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

La manière d'obtenir une telle stratégie ayant une valeur à la date $t = 1$ minimale consiste à chercher les stratégies égalisant deux des inégalités précédentes. On obtient donc 3 candidats pour la stratégie cherchée :

1. $H(2) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$ pour laquelle $V_1 = \frac{8}{3}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_0(2) & +6H_1(2) & = 4 \\ H_0(2) & +3H_1(2) & = 3 \\ H_0(2) & +H_1(2) & = \frac{7}{3} > 2 \end{array} \right.$$

2. $H(2) = \left(\frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right)$ pour laquelle $V_1 = \frac{12}{5}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_0(2) & +6H_1(2) & = 4 \\ H_0(2) & +3H_1(2) & = \frac{14}{5} < 3 \\ H_0(2) & +H_1(2) & = 2 \end{array} \right.$$

3. $H(2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pour laquelle $V_1 = \frac{5}{2}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_0(2) & +6H_1(2) & = \frac{9}{2} > 4 \\ H_0(2) & +3H_1(2) & = 3 \\ H_0(2) & +H_1(2) & = 2 \end{array} \right.$$

On voit donc qu'il y a deux stratégies (la première et la troisième) candidates pour résoudre notre problème. Celle à retenir est celle avec la plus petite valeur à la date $t = 1$, c-a-d $H(2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, pour laquelle $V_1 = \frac{5}{2}$.

Nous avons donc identifié la meilleure stratégie à appliquer sur la seconde période, qui donne une valeur de portefeuille de $\frac{11}{3}$ sur les scenarii ω_1, ω_2 et $\frac{5}{2}$ sur les scenarii $\omega_3, \omega_4, \omega_5$. On cherche maintenant à déterminer la stratégie à appliquer sur la première période pour obtenir ce résultat : on cherche $H(1) = (H_0(1), H_1(1))$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_0(1) & +5H_1(1) & = \frac{11}{3} \\ H_0(1) & +2H_1(1) & = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Ce système admet pour unique solution $H(1) = \left(\frac{31}{18}, \frac{7}{18}\right)$, ce qui donne une richesse initiale $V_0 = \frac{59}{18}$. Cette valeur permet de mettre en place un stratégie donnant une richesse terminale supérieure à X. Le prix de l'option est donc inférieur à $\frac{59}{18} \approx 3,278$.

Pour obtenir une borne inférieure du prix, on cherche à résoudre le système d'inéquations (1) ci-dessus en changeant le sens des inégalités. De nouveau, la meilleure stratégie (c-a-d celle avec une richesse initiale maximale) est obtenue en égalisant deux inégalités. Parmi les trois solutions ci-dessus, une seule donne une valeur terminale inférieure au payoff : c'est la stratégie $H(2) = \left(\frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right)$ pour laquelle $V_1 = \frac{12}{5}$.

Pour déterminer la stratégie sur la période $[0, 1]$, nous devons donc résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_0(1) & +5H_1(1) & = \frac{11}{3} \\ H_0(1) & +2H_1(1) & = \frac{12}{5} \end{array} \right.$$

L'unique solution est $H(1) = \left(\frac{14}{9}, \frac{19}{45}\right)$, pour laquelle $V_0 = \frac{146}{45} \approx 3,244$.

On obtient finalement la fourchette de prix $\left[\frac{146}{45}, \frac{59}{18}\right]$.

Exercice 12 : En vous inspirant de l'exercice 5, donner une formule de parité entre le prix d'un call et le prix d'un put de même strike et de même sous-jacent. En déduire une formule pour le prix d'un put dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein.

Correction : Soit C et P les prix d'un call et d'un put européens de même strike K et de même maturité T dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein. Puisque ce modèle admet une unique probabilité risque neutre, tout payoff est replicable et on a

$$C = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_1(T)-K)^+}{S_0(T)}\right]$$

et

$$P = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-S_1(T))^+}{S_0(T)}\right].$$

On peut donc appliquer le même calcul que dans l'exercice 5 pour obtenir la formule de parité call-put

$$C - P = S_1(0) - \frac{K}{(1+r)^T}.$$

En utilisant la formule des notes de cours, on obtient pour le prix du put

$$P = \frac{K}{(1+r)^T}\left[1 - B(T,\eta,p)\right] - S_1(0)\left[1 - B\left(T,\eta,\frac{p(1+h)}{1+r}\right)\right],$$

où

$$p = \frac{r-b}{h-b} \qquad \text{et} \qquad \eta = \inf\{j \geq 0 : S_1(0)(1+h)^j(1+b)^{T-j} > K\}.$$

En utilisant la formule du binôme

$$\sum_{i=1}^{T} C_T^k x^k (1-x)^{T-k} = (x+1-x)^T = 1,$$

on obtient la relation suivante, vraie pour tout $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$,

$$1 - B(T,n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_T^k x^k (1-x)^{T-k} = \sum_{l=T-n+1}^{T} C_T^l x^{T-l}(1-x)^l = B(T,T-n+1,1-x),$$

où l'on a posé $l = T-k$. En remarquant de plus que $T-\eta+1 = \eta'$, où

$$\eta' = \inf\{j \geq 0 : S_1(0)(1+h)^{T-j}(1+b)^j \leq K\},$$

et que

$$1 - \frac{p(1+h)}{1+r} = \frac{q(1+b)}{1+r}, \qquad \text{où} \qquad q = 1-p = \frac{h-r}{h-b},$$

on obtient finalement la formule

$$P = \frac{K}{(1+r)^T} B(T,\eta',q) - S_1(0) B\left(T,\eta',\frac{q(1+b)}{1+r}\right).$$

Indications pour les Exercices 13 et 14 : La résolution de ces deux exercices nécessite de disposer d'un logiciel de calcul scientifique (pour calculer la fonction de répartition gaussienne pour l'exercice 13, et pour coder le calcul approché de l'inverse d'une fonction pour l'exercice 14, par exemple par la méthode de Newton).

Ces deux exercices montrent deux utilisations pratiques de la formule de Black et Scholes utilisées quotidiennement dans les salles de marché.