Problèmes inverses — Estimation par maximum de vraisemblance

Corrigé de la feuille d'exercices — Exercices 1 à 4

Exercice 1

Soit $\theta_A \in [0,1]$ et $\theta_B \in [0,1]$ la probabilité d'obtenir pile avec la pièce d'André et Berthe, respectivement. On note X le résultat d'un jeu, avec le code $X = -1$ si c'est Berthe qui gagne, $X = 0$ si personne ne gagne et $X = 1$ si c'est André qui gagne. Alors la probabilité que $X = -1$ vaut $\theta_B(1-\theta_A)$, que $X = 0$ vaut $\theta_A\theta_B + (1-\theta_A)(1-\theta_B)$ et que $X = 1$ vaut $\theta_A(1-\theta_B)$. Donc le modèle statistique correspondant à cette expérience est

$$\left(\{-1,0,1\}^n, \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}\}_{\theta=(\theta_A,\theta_B)\in[0,1]^2}\right),$$

où la probabilité $\mathbb{P}_\theta$ sur $\{-1,0,1\}$ est définie par

$$\mathbb{P}_\theta\{-1\} = \theta_B(1-\theta_A); \quad \mathbb{P}_\theta\{0\} = \theta_A\theta_B + (1-\theta_A)(1-\theta_B); \quad \mathbb{P}_\theta\{1\} = \theta_A(1-\theta_B).$$

Exercice 2

Soit T_A et T_B les durées de vie des diodes A et B, respectivement. Par hypothèse, T_A et T_B sont indépendantes, avec $T_A \sim \mathrm{Exp}(\theta_A)$ et $T_B \sim \mathrm{Exp}(\theta_B)$ pour des paramètres $\theta_A, \theta_B > 0$.

1. La durée de vie du circuit est $T = \inf\{T_A, T_B\}$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(T \geqslant t) = \mathbb{P}(T_A \geqslant t \text{ et } T_B \geqslant t) = \mathbb{P}(T_A \geqslant t)\mathbb{P}(T_B \geqslant t) = e^{-\theta_A t}e^{-\theta_B t} = e^{-(\theta_A+\theta_B)t},$$

donc $T \sim \mathrm{Exp}(\theta_A + \theta_B)$.

2. Un modèle statistique identifiable de cette expérience est

$$\left(\mathbb{R}_+^n, \{\mathrm{Exp}(\theta)^{\otimes n}\}_{\theta>0}\right),$$

où $\theta = \theta_A + \theta_B$. Remarquons que, si nous avions remplacé θ par (θ_A, θ_B), le modèle ne serait pas identifiable, car $(\theta_A, \theta_B) \mapsto \theta_A + \theta_B$ n'est pas injective.

3. Soit $D \in \{A, B\}$ le type de diode qui tombe le premier en panne.

$$\mathbb{P}(D = A) = \mathbb{P}(T_A < T_B) = \int_0^\infty dx \int_x^\infty dy \theta_A e^{-\theta_A x}\theta_B e^{-\theta_B y} = \int_0^\infty \theta_A e^{-(\theta_A+\theta_B)x}dx = \frac{\theta_A}{\theta_A+\theta_B}.$$

Un modèle statistique identifiable de cette seconde expérience est donc

$$\left(\{A,B\}^n, \left\{\left(\theta'\delta_A + (1-\theta')\delta_B\right)^{\otimes n}\right\}_{\theta'\in]0,1[}\right),$$

où $\theta' = \frac{\theta_A}{\theta_A+\theta_B}$.

4. De même, un modèle statistiques identifiable de cette expérience est donné par

$$\left((\mathbb{R}_+ \times \{A,B\})^n, \left\{\left[\mathrm{Exp}(\theta_A+\theta_B) \otimes \left(\frac{\theta_A}{\theta_A+\theta_B}\delta_A + \frac{\theta_B}{\theta_A+\theta_B}\delta_B\right)\right]^{\otimes n}\right\}_{(\theta_A,\theta_B)\in(\mathbb{R}_+^*)^2}\right).$$

Exercice 3

1. On note X_k le poids du cochon de la k-ième génération. Par hypothèse, on a

$$X_k = \lambda X_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$

où les ε_i sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Donc

$$X_k = \lambda^2 X_{k-2} + \lambda\varepsilon_{k-2} + \varepsilon_{k-1} = \ldots = \lambda^k X_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} \lambda^{k-1-\ell}\varepsilon_\ell.$$

2. Le vecteur $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k)$ est un vecteur gaussien, donc toute combinaison linéaire est gaussienne et

$$\mathbb{E}(X_k) = \lambda^k X_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{Var}(\lambda^{k-1-\ell}\varepsilon_\ell) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \lambda^{2(k-1-\ell)}\sigma^2 = \sigma^2 \frac{\lambda^{2k}-1}{\lambda^2-1}.$$

Donc

$$X_k \sim \mathcal{N}\left(\lambda^k X_0\,,\, \sigma^2 \frac{\lambda^{2k}-1}{\lambda^2-1}\right).$$

3. Pour donner le modèle statistique complet, il faut déterminer la loi jointe de $(X_1, \ldots, X_n)$. C'est un vecteur gaussien dont nous connaissons la moyenne. Il reste à calculer sa matrice de covariance. Soit $i \leqslant j$, par indépendance des ε_i,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{\ell=0}^{i-1} \mathrm{Cov}(\lambda^{i-1-\ell}\varepsilon_\ell, \lambda^{j-1-\ell}\varepsilon_\ell) = \sigma^2\lambda^{j-i} \sum_{\ell=0}^{i-1} \lambda^{2(i-1-\ell)} = \sigma^2\lambda^{j-i}\frac{\lambda^{2i}-1}{\lambda^2-1}.$$

Donc le modèle statistique est

$$(\mathbb{R}^n, \{\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)\})_{\lambda>0,\sigma>0},)$$

où $\mu = (\lambda X_0, \ldots, \lambda^n X_0)$ et $\Sigma_{ij} = \sigma^2\lambda^{|j-i|}\frac{\lambda^{2\min\{i,j\}}-1}{\lambda^2-1}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 4

1. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta(Y_\theta \in dy) &= \mathbb{P}_\theta(Y_\theta \in dy \mid R = -1)\mathbb{P}_\theta(R = -1) + \mathbb{P}_\theta(Y_\theta \in dy \mid R = 1)\mathbb{P}_\theta(R = 1) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+\theta)^2}{2}} \times \frac{1}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2+\theta^2}{2}} \frac{e^{\theta y} + e^{-\theta y}}{2} dy.
\end{aligned}$$

Notons $f_\theta(y)$ cette densité.

2. Le modèle statistique de ce modèle est

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{\prod_{i=1}^n f_\theta(y_i)\, dy_1 \ldots dy_n\right\}_{\theta\in\mathbb{R}}\right).$$