Processus de Markov en temps continu et génétique des populations.

Feuille d'exercices 2 — 2014–2015

Nicolas Champagnat

Le coalescent de Kingman

Exercice 6 : loi des grands nombres et TCL pour la vitesse de descente de l'infini du coalescent de Kingman

Soit $(\mathcal{R}_t, t \geqslant 0)$ le coalescent de Kingman issu de la partition triviale $\{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots\}$, et soit $R_t = |\mathcal{R}_t|$. On rappelle que l'on peut construire R_t à partir d'une suite $(T_n)_{n\geqslant 2}$ de v.a. indépendantes, avec T_n de loi exponentielle de paramètre $n(n-1)/2$, par la formule

$$R_t = \sum_{n\geqslant 1} n \mathbb{1}_{\{S_n \leqslant t < S_{n-1}\}}, \quad \forall t > 0,$$

où

$$S_n = \sum_{k\geqslant n+1} T_k, \quad \forall n \geqslant 1.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{2}{n},$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k\geqslant n} \frac{4}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{4}{3n^3} \quad \text{quand } n \to \infty,$$

$$\mathbb{E}(|S_n - \mathbb{E}S_n|^4) \leqslant \frac{C}{n^6},$$

pour une constante C finie.
(Indication : on remarquera que $\mathbb{E}(|T_k - \mathbb{E}T_k|^4) = C/k^4(k-1)^4$, et on utilisera des comparaisons entre séries et intégrales pour obtenir l'équivalent de $\mathrm{Var}(S_n)$.)

2. Loi des grands nombres :

a) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\mathbb{E}S_n}\right|^4\right) \leqslant \frac{C'}{n^2}$$

pour une constante C' finie. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, en déduire que $nS_n \to 2$ p.s.

b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit l'événement

$$A_n = \left\{ \sup_{S_n \leqslant t < S_{n-1}} \left| \frac{tn}{2} - 1 \right| > \varepsilon \right\}.$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$ et en déduire que $tR_t \to 2$ p.s. quand $t \to 0$.
(Indication : on montrera que $A_n \subset \{|nS_n/2 - 1| > \varepsilon\} \cup \{|(n-1)S_{n-1}/2 - 1| > \varepsilon\}$ pour n assez grand.)

3. Théorème de la limite centrale :

a) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$Z_n = \sqrt{3n}\,\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\mathbb{E}S_n}.$$

En calculant la fonction caractéristique de Z_n, montrer que $Z_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ en loi.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_n \leqslant a) \to \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

puis que

$$\mathbb{P}\left(R_{\frac{2}{n} + \frac{2a}{\sqrt{3}n^{3/2}}} \leqslant n \right) \to \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

quand $n \to +\infty$.

c) Soit $t > 0$ fixé. On pose $n(t,a)$ l'entier positif n tel que

$$\frac{2}{n} + \frac{2a}{\sqrt{3}n^{3/2}} \leqslant t < \frac{2}{n-1} + \frac{2a}{\sqrt{3}(n-1)^{3/2}}.$$

Montrer que

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}(R_t \leqslant n(t,a)) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

d) Montrer que

$$n(t,a) = \frac{2}{t} + \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3t}} + O(\sqrt{t})$$

quand $t \to 0$.

e) En déduire que

$$\sqrt{\frac{6}{t}} \left(\frac{tR_t}{2} - 1 \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

en loi quand $t \to 0$.

Exercice 7 : Preuve d'un lemme du cours

Soit $\theta > 0$, $n \geqslant 1$ et $Q_1, \ldots, Q_n$ des v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres $\theta, \frac{\theta}{2}, \ldots, \frac{\theta}{j}$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} jQ_j = n\right) = \frac{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}{n!\exp(\theta\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})}.$$

1. Montrer que la probabilité précédente s'écrit

$$\exp(-\theta\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})\sum_{k=1}^{n}\alpha(n,k)\theta^k,$$

où

$$\alpha(n,k) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geqslant 0 \text{ t.q. } \sum k_j = k,\, \sum jk_j = n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{k_j} k_j!}.$$

2. Soit $s(n,k)$ défini par la relation $\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\theta^k$. Montrer que

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k).$$

3. Montrer que $s'(n,k) = \text{Card}\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma \text{ a exactement } k \text{ cycles}\}$ satisfait la même relation de récurrence et en déduire que $s(n,k) = s'(n,k)$.

4. En déduire que $s(n,k) = n!\alpha(n,k)$.

5. Conclure.