Introduction à la finance quantitative

slides disponibles sur la page web :

http://nchampagnat.perso.math.cnrs.fr/

Nicolas Champagnat

Institut Élie Cartan de Lorraine et Inria

2022-2023

Introduction à la finance quantitative

Introduction aux marchés financiers

Les marchés financiers sont en plein essor depuis près de 40 ans. L'informatique a largement contribué à les rendre accessibles au "grand public". Mais le fonctionnement de ces marchés semble trop souvent obscur: ces marchés sont-ils uniquement régis par la chance, la spéculation ? Comment les acteurs déterminent-ils le prix des actifs échangés ?

- les rôles des marchés financiers
- Les différents types de marchés
- les produits échangés

Définition :

système permettant à des agents économiques de mettre des capitaux et d'autres actifs financiers à la disposition d'autres agents économiques.

Rôles des marchés financiers

1. **mettre en relation directe les demandeurs et les pourvoyeurs de fonds présents dans un économie donnée**.

   dans un but d'allocation de capital et de financement de l'économie

   Economie de marchés financiers: les entreprises qui cherchent des fonds font appel directement aux marchés financiers par l'emission d'actions ou d'obligations.

2. **Échange de devises convertibles**

   Marché des changes

3. **permettre de gérer les risques économiques et financiers**

   en permettant aux intervenants de les échanger ou de les mettre en commun grâce à l'utilisation de produits plus ou moins complexes.

Rien n'est pire pour un manager que de voir les bénéfices d'une transaction réduits à néant en raison d'une forte variation du cours d'une devise étrangère. (...) La valeur des flux en devises d'une entreprise est beaucoup moins stable que par le passé en l'absence de couverture.
Les Echos.

D'après une étude récente (Wharton School, Pennsylvania), environ 40% sociétés interrogées ont déclaré avoir une politique de couverture.

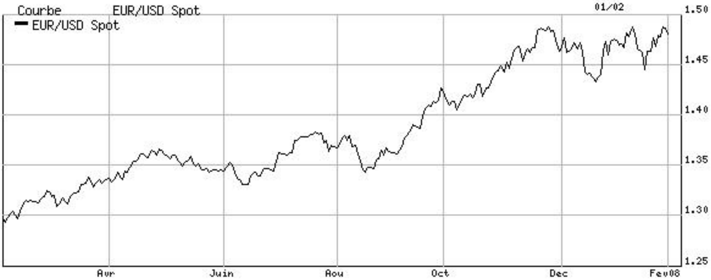
Risque de transaction ou risque de change :

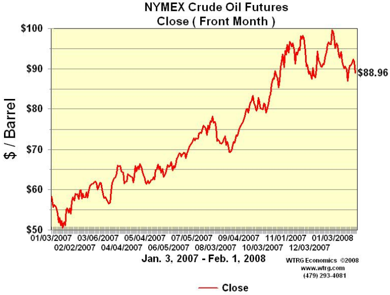
- une société A (américaine) vend du matériel à une société B (britannique) pour un montant de 100.000 livres
- taux de change à la signature du contrat: 1,60 dollar pour 1 livre.
- A enregistre une créance de 160.000 $.
- le taux de change tombe à 1,50 $ pour 1 livre sterling à la date de règlement
- A enregistre en comptabilité un encaissement de 150.000 dollars et une perte de 10.000 dollars.

La société doit donc **se couvrir** (plusieurs possibilités)

Bien d'autres risques financiers peuvent être supportés par le marché :

- risque de taux
- risque de contrepartie ou risque de défaut
- risque pays
- risque de liquidité
- risque climatique...


Courbe EUR/USD Spot
EUR/USD Spot
01/02
1.50
1.45
1.40
1.35
1.30
1.25
Avr
Juin
Aou
Oct
Dec
Fev08


NYMEX Crude Oil Futures
Close (Front Month)
$ / Barrel
$100
$90
$80
$70
$60
$50
$88.96
01/03/2007
03/06/2007
05/04/2007
07/05/2007
09/04/2007
11/01/2007
01/03/2008
02/02/2007
04/04/2007
06/05/2007
08/03/2007
10/03/2007
12/03/2007
Jan. 3, 2007 - Feb. 1, 2008
WTRG Economics ©2008
www.wtrg.com
(479) 293-4081
Close

Les différents types de marchés

- **Les marchés de gré à gré :** ni reglementés, ni localisés, il s'agit de négociations bilatérales directement entre institutions financières. Sujet au risque de contrepartie.

  Parmi ces marchés, il y a le marché interbancaire , où les banques (banques centrales comprises) s'échangent des emprunts ou des prêts à court terme. Les taux pratiqués sur ce marchés (ex : l'EURIBOR) sont considérés comme stables et peu risqués.

Les différents types de marchés (suite)

- **Les marchés organisés :** reglementés et localisés, avec des organismes gérant différents risques (chambre de compensation, AMF : Autorité des Marchés Financiers...).
  - Le marché primaire ou marché du neuf : émission de titres (actions, obligations) à un cours fixé par l'émetteur.
  - Le marché secondaire ou marché de l'occasion : c'est **la bourse**, où s'échangent les valeurs mobilières déjà émises, et où les cours fluctuent en fonction de l'offre et la demande.

Le marché boursier français est centralisé :

Les prix sont établis en fonction de l'offre et la demande. Les négociateurs (intermédiaires financiers membre d'Euronext) entrent les ordres de leurs clients dans le carnet d'ordres d'Euronext Paris qui permet de confronter l'offre et la demande sur le titre.

Exemple : Soit la feuille de marché pour l'action suivante :

Demande			Offre		
Cumul	Quantité	Prix	Prix	Quantité	Cumul
300	300	tout	tout	400	400
1400	1100	155,8	155,55	200	600
2100	700	155,7	155,6	250	850
3100	1000	155,6	155,65	500	1350
4000	900	155,5	155,7	850	2200
6000	2000	155,4	155,85	2000	4200

Le cours d'équilibre est 155,7 euros (maximise le nombre de transactions: 2 200 actions offertes et 2 100 demandées).

100 actions offertes à 155,7 euros ne trouveront donc pas preneur, ce seront les dernières arrivées sur le marché.

Les produits échangés

En plus des devises et des matières premières (métaux, pétrole, aliments), 3 grandes familles d'actifs s'échangent sur les marchés financiers.

Actions

- Titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant à son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit à l'information et aux bénéfices.
- Sa valeur nominale représente la part de capital correspondant à l'action.
- Son prix est le résultat de l'offre et la demande.

exemple de l'action EDF

exemple de l'action Areva

Obligations

Titre financier qui matérialise l'engagement d'un emprunteur envers un prêteur qui, en contrepartie, met des fonds à sa disposition.

Cet engagement prévoit un échéancier de flux financier, les modalités de remboursement des fonds et un mode de rémunération.

En France, les obligations d'état sont les Bons du Trésor (à court terme), les BTAN (Bons du Trésor à intérêt annuel, à moyen term) et les OAT (Obligations assimilables du Trésor, à long terme)

Exemple: l'obligation assimilable du Trésor 4.75% 25/4/2035, dont la détention unitaire (on dit aussi : valeur nominale) est d'un euro, est un contrat par lequel la République française s'engage à verser au détenteur du dit contrat :

- chaque année le 25 avril $0,0475$ euro ($4,75\%$ d'un euro), entre maintenant et le 25 avril 2035 inclus,
- plus $1,00$ euro le 25 avril 2035.

Le prix auquel ce contrat se négocie actuellement est la valeur actuelle de l'obligation.

Autres exemples : Société Générale Obligations d'Etat grecques

Les contrats à terme ou produits dérivés

Les contrats à terme servent à acheter ou à vendre un instrument sous-jacent à un moment précis dans le futur et à un prix donné. Le sous-jacent peut être une (ou des) action(s), une obligation, des matières premières, des devises, des taux d'intérêt, voire même d'autres produits dérivés.

- Acheter (prendre une position longue, *long*) un contrat à terme vous engage à acheter l'actif sous-jacent à une date ultérieure.
- Vendre (prendre une position courte, *short*, à découvert) un contrat à terme vous engage à vendre l'actif sous-jacent à une date postérieure.

Les contrats classiques sont:

1. les *forwards*
2. les *futurs*
3. les *options*

forward - futur - option

- contrat d'achat ou de vente d'un actif (sous-jacent) à une date future fixée (maturité) pour un prix convenu à l'avance.
- passé entre deux institutions, de gré à gré, ne s'échange pas sur le marché

Exemple : le 1er avril, contrat *forward* pour 100 oz (once) d'or le 1er juillet à 450 \$ oz

L'individu en position *long* fait des profits lorsque le prix du sous-jacent augmente.

forward - futur - option

- contrat de vente ou d'achat à une date future fixée d'un sous-jacent pour un prix fixé à l'avance (comme les forwards)
- actifs négociables sur les marchés

Exemple : le Winefex (Bordeaux) lancé par Euronext.

- sous-jacent: vin de Bordeaux primeur choisi parmi des appellations connues (Saint-Estèphe, Margaux,...)
- quantité 5 caisses de 12 bouteilles de 75cl
- cotation en Euro par bouteille
- variation minimale du cours: 0.1 Euro / bouteille soit 6 Euro / contrat
- échéances: Nov., Mars, May, Juil., Sept.
- liquidation du contrat: livraison effective ou bien cash au prix de clôture

forward - futur - option

Large gamme de produits très différents

La grande différence entre les options et les futurs :

- le contrat forward ou futur établit l'obligation d'acheter ou de vendre à la maturité.

- l'option donne le **droit** d'acheter ou de vendre à la maturité.

Exemples fondamentaux:

- l'option d'achat (*call*) donne à son détenteur le droit d'acheter à une date future un actif pour un prix déterminé à l'avance.
- l'option de vente (*put*) donne à son détenteur le droit de vendre à une date future un actif pour un prix déterminé à l'avance.

forward - futur - option

Exemple: option d'achat jusqu'au 1er juillet de 100 actions de Alcan à 20 $ l'action.

Prix spot Alcan: 21 $ l'action

Prix de l'option 132 $.

On distingue les options suivant la date d'exercice:

- option *européenne* elle peut s'exercer le jour de sa maturité
- option *américaine* elle peut s'exercer à n'importe quel moment avant sa date de maturité.

Comment déterminer la valeur d'une option ?
Quel est son prix raisonnable ?
Comment prendre en compte les différents types de risque ?
Peut-on prévoir et estimer les prix des actifs à moyen terme ?
Quel modèle de prix utiliser pour appréhender l'aléa ?

Rôle de la modélisation mathématique pour déterminer le prix des actifs

Les prix de tous les actifs sont déterminés par l'offre et la demande.

Action, obligation, matière première:

- Un trader doit raisonner en terme d'espérance de gain (ou d'utilité), de risques extrêmes, de tendances haussières ou baissières...
- Le rôle de la modélisation est limité par les problèmes de calibration et par le nombre de facteurs à prendre en compte
  ➽ Les traders utilisent souvent les méthodes d'analyse technique (ou graphique, ou chartiste).
  Exemples: droite de support, droite de résistance...

Option, Futur, Forward:

- Ici, le prix est déterminé par un (ou plusieurs) autre(s) actif(s)
  ➽ la modélisation du prix de cet actif suffit pour étudier la valorisation des options.
- Au lieu d'une valorisation de portefeuille en moyenne, on verra qu'ici le prix de l'option peut être caractérisé de manière unique.

Un exemple : valorisation des contrat *futur*

On considère un marché financier comportant

- un actif risqué de cours S_t à la date t ;
- un taux d'emprunt ou de placement sans risque (ex. EURIBOR) r.

Comment calculer le prix p d'un contrat futur portant sur l'actif risqué S_t, signé à la date 0 et d'échéance T ?

A la date 0, un investisseur sur le marché souhaitant disposer d'un actif risqué à la date T peut utiliser deux stratégies d'investissement :

- Stratégie $\mathcal{S}_1$: il peut emprunter un montant S_0 au taux sans risque et acheter l'actif au prix S_0
  ➽ passif $S_0 e^{rT}$ à la date T
- Stratégie $\mathcal{S}_2$: il peut signer un contrat futur sur S_t d'échéance T
  ➽ passif p à la date T

Supposons que $p > S_0 e^{rT}$: l'investisseur peut mettre en place la stratégie $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$, c-à-d

- émettre lui-même un contrat futur au prix p
- emprunter S_0 au taux sans risque
- acheter immédiatement l'actif risqué
- le remettre au détenteur du contrat futur à la date T pour un montant p

Bilan : $p - S_0 e^{rT} > 0$

Supposons que $p < S_0 e^{rT}$: l'investisseur peut mettre en place la stratégie $\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$, c-à-d

- signer le contrat futur au prix p
- "emprunter" un actif risqué à la date 0 et le vendre immédiatement
- placer l'argent obtenu au taux sans risque
- payer p à la date T pour obtenir un actif risqué et le "rembourser"

Bilan : $S_0 e^{rT} - p > 0$

Sous les hypothèses que :

- Le marché offre la possibilité “d’emprunter” (ou de vendre sans posséder) un actif
- Le marché n’offre pas la possibilité de faire du profit à coup sûr
- Le marchés est liquide, c-à-d qu’il est toujours possible de trouver immédiatement une contrepartie pour tout actif ou produit dérivé au prix du marché
- En négligeant le risque de défaut

Alors le “juste prix” d’un contrat futur sur un actif S_t d’échéance T est $p = S_0 e^{rT}$

La suite :

- Formaliser le modèle de marché précédent
- Définir rigoureusement les notions et les hypothèses ci-dessus
- Etendre le raisonnement précédent pour établir une théorie de valorisation de n’importe-quel produit dérivé

Comment définir un modèles pour les prix dans le contexte de la finance de marché ?

Comment évaluer les prix des produits dérivés dans un tel modèle ?

On se met à la place d'un investisseur qui vend une option à un autre :

- il a reçu le prix de contrat à son émission
- il doit investir cet argent pour payer le payoff du contrat à son échéance

LES MODELES A UNE PERIODE

- définition et structure d'un modèle
- arbitrage et autres considérations économiques
- évaluation des contrats financiers et complétude des marchés

Définition et structure d'un modèle

Différents éléments d'un modèle à une période:

1. deux dates (la période): $t = 0$ et $t = 1$ (maturité)
2. des scenarii décrivant le futur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$
3. chaque scenario se réalise avec une probabilité strictement positive $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_i) = 1$.
4. un actif sans risque appelé *numéraire*
   actif théorique qui rapporte le taux d'intérêt sans risque (emprunts d'État à court terme).
   Il est déterministe. Sa valeur est connue à l'avance (non corrélé avec les autres actifs).
   Noté $S_0(t)$, on définit son *rendement* r par $S_0(1) = S_0(0)(1 + r)$.
   Placer 1 Euro dans un actif sans risque de rendement 4 %: en fin de période $1 * (1 + 0.04) = 1.04$ Euro.

5 un processus de prix $S = \{S(t) : \ t = 0, 1\}$ où $S_t = (S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t))$ avec $S_n(t)$ le prix du $n$ième actif au temps t.

Exemple: CAC40 : pour chaque actif, considérer la valeur à $t = 0$ et sa valeur à l'instant final (1 an par ex.)
S_1 valeur de l'action Accor: $S_1(0) = 24.08$,
S_2 valeur de l'action Air Liquide: $S_2(0) = 90.26$,
...
S_{40} valeur de l'action Vivendi: $S_{40}(0) = 15.95$.

Les valeurs à $t = 0$ sont entièrement déterminées. Celles en fin de période sont inconnues de l'investisseur (données aléatoires)

L'investisseur se donne un modèle, c.-à-d. différents scenarii qui se réalisent suivant la probabilité $\mathbb{P}$.

Exemple de modèle : $S_0(0) = 1$, $r = 0.04$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	5	6	6	4	5
2	10	4	8	8	7
3	7	5	6	5	6

stratégie d'investissement

La *stratégie d'investissement* est définie à partir du portefeuille $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)$, où

- H_0 est la quantité d'euros investis dans l'actif sans risque
- H_n est le nombre d'unités du $n$ième actif présentes dans le portefeuille.

H_n peut être **positif ou négatif** (cas d'un emprunt ou d'une position de vente *short*).

Valeur initiale du portefeuille d'investissement:

$$V_0 = \sum_{n=0}^{N} H_n S_n(0).$$

Valeur finale (aléatoire) du portefeuille:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{N} H_n S_n(1).$$

On définit également le **gain** obtenu par l'investisseur :

$$G = V_1 - V_0 = \sum_{n=0}^{N} H_n \Delta S_n, \quad \text{où} \quad \Delta S_n = S_n(1) - S_n(0).$$

Par ex. avec $H = (1, -1, 1, 2)$, $S_0(0) = 1$, $r = 0.02$ et

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	5	6	6	4	5
2	10	4	8	8	11
3	7	5	6	5	8

alors $V_0 = 1 * 1 - 1 * 5 + 1 * 10 + 2 * 7 = 20$ et V_1 vaut:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
V_1	9.02	15.02	15.02	23.02
G	-10.98	-4.98	-4.98	3.02

Actualisation

La valeur des actifs et le gain d'un portefeuille doivent être actualisé, c.-à-d. exprimé par unité d'actif sans risque à la date considérée.
On définit les prix actualisés des actifs :

$$S_t^* = (S_0^*(t), \dots, S_N^*(t)) \quad \text{où} \quad S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{S_0(t)}.$$

Le prix de l'actif sans risque est alors constant sur la période $S_0^*(0) = S_0^*(1) = 1$.
De même, on définit la valeur actualisée du portefeuille et le gain actualisé :

$$V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(t) = \frac{V_t}{S_0(t)}.$$

$$G^* = \sum_{n=1}^N H_n \Delta S_n^* = \sum_{n=1}^N H_n \left(\frac{S_n(1)}{S_0(1)} - \frac{S_n(0)}{S_0(0)} \right) = V_1^* - V_0^*.$$

Exemple: $k = 3$ $r = 1/9$ et $N = 2$ avec $S_0(0) = 1$.

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
	ω_1	ω_2	ω_3
5	6	6	4
10	12	8	8

On choisit la stratégie d'investissement $H = (6, 1, -1)$

alors $V_0 = V_0^* = 1$ et

	ω_1	ω_2	ω_3
V_1	0	40/9	20/9
V_1^*	0	4	2
G	-1	31/9	11/9
G^*	-1	3	1

Contrainte économique

Exigence d'un modèle de marché : le modèle est irréaliste si un investisseur trouve une stratégie qui lui fait gagner de l'argent à coup sûr quel que soit le scenario

- explosion du prix des actifs.
- disparition rapide de telles stratégies qui gagnent à coup sûr.

Stratégie dominante: une stratégie $\hat{H}$ est dominante s'il existe une autre stratégie $\tilde{H}$ telle que

$$\hat{V}_0 = \tilde{V}_0 \quad \text{et} \quad \hat{V}_1 > \tilde{V}_1$$

pour tous les scenarii.

Ex: $r = 0$ et $S_0 = 1$:
$\tilde{H} = (2, 1, -1)$, $\hat{H} = (7, 2, -2)$
$\hat{V}_0 = \tilde{V}_0 = -3$ et $\hat{V}_1 = 1,\ 3$ ou 5; $\tilde{V}_1 = -1,\ 0$ ou -2

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	9	8	8

Résultat:

Il existe une stratégie dominante $\Leftrightarrow$ il existe une stratégie H vérifiant $V_0 = 0$ et $V_1 > 0$ pour tous les scenarii.

Dans l'exemple précédent, cette stratégie est $H = (5, 1, -1)$ qui donne le résultat: $V_0 = 0$ et $V_1 = 2,\ 3$ ou 1.

➽ ceci n'est pas raisonnable !!

➽ on refuse l'existence de toute stratégie dominante dans un modèle de prix.

Mesure de valorisation universelle

Définir le prix d'un contrat financier c'est essayer d'obtenir un résultat similaire à l'aide d'une stratégie d'investissement et évaluer la valeur initiale d'un tel portefeuille.

➽ il faut pouvoir relier de façon universelle les résultats en fin de période à la valeur du portefeuille en début de période.

Ex. On veut un portefeuille $V_1^* = 3$ pour le scenario ω_1, 4 sur le scenario ω_2 et 6 sur le scenario ω_3.

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Stratégie d'investissement $(12, -1, -1/4)$
Valeur initiale du portefeuille 4.5 euros.

Une *mesure de pricing linéaire* (ou mesure de valorisation universelle) est définie par $\pi = (\pi(\omega_1), \ldots, \pi(\omega_k))$ (avec $\pi \geq 0$) satisfaisant:
pour toute stratégie H

$$V_0^* = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) V_1(\omega)/S_0(\omega).$$

Résultat

π mesure de pricing $\Leftrightarrow$ π probabilité satisfaisant

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega).$$

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Ex. la probabilité $\pi = (1/2, 0, 1/2)$ est une mesure de pricing linéaire.

Résultat

Il existe une mesure de pricing $\Leftrightarrow$ il n'existe pas de stratégie dominante.

Trouver une mesure de pricing revient à trouver un point de vue particulier sous lequel les prix des actifs en début de période s'expriment comme une *moyenne* des valeurs des actifs en fin de période.

Remarque : La mesure de pricing ne dépend en aucune façon des valeurs précises de $\mathbb{P}(\omega_i)$.

loi du prix unique (plus faible): un modèle vérifie la *loi du prix unique* s'il n'existe pas deux stratégies différentes $\hat{H}$ et $\tilde{H}$ telles que $\hat{V}_1 = \tilde{V}_1$ pour tous les scenarii et $\hat{V}_0 > \tilde{V}_0$.

➽ aucune ambiguïté sur le prix d'un contrat.

Résultat

Existence d'une mesure de pricing $\Rightarrow$ loi du prix unique.

En effet, s'il existait deux stratégies $\hat{H}$ et $\tilde{H}$ telles que $\hat{V}_1 = \tilde{V}_1$ et $\hat{V}_0 > \tilde{V}_0$, alors la stratégie définie par $H_n = \hat{H}_n$ pour $1 \leq n \leq N$ et

$$H_0 = \hat{H}_0 - \frac{\hat{V}_0 - \tilde{V}_0}{S_0(0)}$$

est une stratégie qui domine $\tilde{H}$.

Exemple : $S_0(0) = 1$, $r = 1$,

$S_1(0)$	$S_1(1)$	
	ω_1	ω_2
10	12	8

Il existe toujours une seule stratégie telle que $V_1 = X$, solution du système

$$2H_0 + 12H_1 = X(\omega_1)$$
$$2H_0 + 8H_1 = X(\omega_2).$$

Or, la stratégie $H = (10, -1)$ vérifie $V_0 = 0$ et $V_1 = (8, 12)$.

Exemple: On considère 3 actifs risqués: l'action Danone (BN.PA), l'action BNP Paribas (BNP.PA) et l'action Carrefour (CA.PA).
L'actif sans risque a un rendement de 1.5%

Modèle de prix

	$S_n(0)$	$S_n(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
BN.PA	42.3	43.1	38.3	42.2	43.1
BNP.PA	52.4	51.2	51.2	54.3	50.8
CA.PA	33.5	35.0	31.0	34.5	36.2

Pour actualiser les prix il faut multiplier $S_n(1)$ par $1/1.015 \approx 0.985$.

Prix réels:

	$S_n(0)$	$S_n(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
BN.PA	42.3	43.1	38.3	42.2	43.1
BNP.PA	52.4	51.2	51.2	54.3	50.8
CA.PA	33.5	35.0	31.0	34.5	36.2

Prix actualisés:

	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
BN.PA	42.3	42.5	37.7	41.6	42.5
BNP.PA	52.4	50.4	50.4	53.5	50.0
CA.PA	33.5	34.5	30.5	34.0	35.7

Existe-t-il une stratégie dominante ?

Pour cela il suffit d'étudier l'existence d'une mesure de pricing universelle $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$. Si elle existe elle vérifie

$$\begin{cases} 42.5\pi_1 + 37.7\pi_2 + 41.6\pi_3 + 42.5\pi_4 = 42.3 \\ 50.4\pi_1 + 50.4\pi_2 + 53.5\pi_3 + 50.0\pi_4 = 52.4 \\ 34.5\pi_1 + 30.5\pi_2 + 34.0\pi_3 + 35.7\pi_4 = 33.5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} & -4.8\pi_2 & -0.9\pi_3 & & = -0.2 \\ & & 3.1\pi_3 & -0.4\pi_4 & = 2 \\ & -4\pi_2 & -0.5\pi_3 & +1.2\pi_4 & = -1 \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & +\pi_4 & = 1 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} & -4.8\pi_2 & -0.9\pi_3 & & = -0.2 \\ & & 3.1\pi_3 & -0.4\pi_4 & = 2 \\ & -4\pi_2 & -0.5\pi_3 & +1.2\pi_4 & = -1 \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & +\pi_4 & = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} & -4.8\pi_2 & -0.9\pi_3 & & = -0.2 \\ & & 3.1\pi_3 & -0.4\pi_4 & = 2 \\ & & 1.2\pi_3 & +5.76\pi_4 & = -4 \\ 4.8\pi_1 & & +3.9\pi_3 & +4.8\pi_4 & = 4.6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} & -14.88\pi_2 & -0.9\pi_3 & -0.36\pi_4 & = 1.18 \\ & & 3.1\pi_3 & -0.4\pi_4 & = 2 \\ & & & -18.336\pi_4 & = 14.8 \\ 4.8\pi_1 & & +3.9\pi_3 & +4.8\pi_4 & = 4.6 \end{array}\right.$$

On en déduit $\pi_4 \approx -0.807$ puis $\pi_3 \approx 0.541$, $\pi_2 \approx -0.060$ et $\pi_1 \approx 1.326$.

Conclusion : il existe une stratégie dominante. Le modèle considéré n'est donc pas viable économiquement.

➠ Trouver un "bon modèle" revient donc à le tester en résolvant un système d'équations à plusieurs inconnues :

- le nombre d'**inconnues** correspond au nombre de **scénarii**
- le nombre d'**équations** correspond au nombre d'**actifs** dans le modèle (actif sans risque compris: $N+1$)

Il est plus facile d'avoir un modèle sans stratégie dominante avec un grand nombre de scenarii.

Exercice

On prend $k = 3$, $N = 2$, $r = 0$.

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

Montrer qu'il existe une stratégie dominante et que la loi du prix unique prévaut.

Il faut cependant exiger davantage d'un modèle de prix : l'absence de stratégie dominante ne suffit pas.

Troisième contrainte économique : absence d'opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie H telle que

- $V_0 = 0$,
- $V_1 \geq 0$ pour tous les scenarii,
- $\mathbb{E}[V_1] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) V_1(\omega) > 0$

➽ il faut refuser toute opportunité d'arbitrage, sous peine d'explosion de prix

Exemple : On choisit $r = 0$.

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

La stratégie $H = (0, 2, -1)$ est une opportunité d'arbitrage.
Valeur du portefeuille: $V_1 = 0$ ou 4.

Résultat:

s'il existe une statégie dominante alors il existe une opportunité d'arbitrage.
La réciproque est fausse.

Quelle condition sur la mesure de valorisation universelle ?

Probabilité risque-neutre :

Une probabilité risque neutre est une mesure de pricing $\mathbb{Q}$ satisfaisant:

$$\mathbb{Q}(\omega) > 0 \text{ **pour tout scenario** } \omega \in \Omega.$$

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Rappel : pour $r = 0$, $H = (0, 2, -1)$ est une opportunité d'arbitrage alors qu'il existe une mesure de valorisation universelle $\pi = (1/2, 0, 1/2)$, mais pas de probabilité risque-neutre.

Résultat :

Il n'y a pas d'arbitrage $\Leftrightarrow$ il existe une probabilité risque neutre

L'existence d'une probabilité risque-neutre est le critère de qualité essentiel pour tout modèle de prix.

Quelques exemples : Exemple 1 : $r = 1/9$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$ ω_1	ω_2
0	1	10/9	10/9
1	5	20/3	40/9

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$ ω_1	ω_2
0	1	1	1
1	5	6	4

➽ Existe-t-il une opportunité d'arbitrage ?

➽ Trouver la probabilité risque neutre : q_1, q_2 strictement positifs avec $q_1 + q_2 = 1$, tels que

$$S_1^*(1)(\omega_1)q_1 + S_1^*(1)(\omega_2)q_2 = 5, \quad \text{càd} \quad 6q_1 + 4q_2 = 5.$$

Solution : une seule mesure de probabilté : $q_1 = 1/2 = q_2$.

Exemple 2 :

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	5	6	4	3

Dans ce cas, la probabilité risque neutre doit satisfaire les relations:

$$5 = 6q_1 + 4q_2 + 3q_3 \quad 1 = q_1 + q_2 + q_3$$

Trois inconnues et deux équations $\Rightarrow$ infinité de possibilités.

$$q_2 = 2 - 3q_1 \text{ et } q_3 = -1 + 2q_1$$

On doit avoir $0 < q_2 < 1$ et $0 < q_3 < 1 \Rightarrow 1/2 < q_1 < 2/3$.

Pour tout $1/2 < \lambda < 2/3$, $\mathbb{Q} = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda)$ est une PRN.

Il existe une infinité de probabilités *risque-neutre*

Exemple 3 :

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Une proba risque neutre $\mathbb{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ doit satisfaire

$$\begin{cases} 5 = 6q_1 + 6q_2 + 4q_3 \\ 10 = 12q_1 + 8q_2 + 8q_3 \\ 1 = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

Seule solution $q_1 = q_3 = 1/2$ et $q_2 = 0$, $\rightsquigarrow$ pas de probabilité risque neutre et donc existence d'une opportunité d'arbitrage :

$$H = (0, 4, -2).$$

Pour ce portefeuille $V_0^* = 0$; $V_1^* = 0$ pour les scenarii 1 et 3 et $V_1^* = 8$ pour le scenario 2.

Conclusion

Trois possibilités :

- il existe une unique probabilité risque neutre
- il existe une infinité de probabilités risque neutre
- il n'existe aucune probabilité risque neutre.

Evaluation des contrats financiers

Un modèle de prix économiquement viable étant donné, il s'agit de calculer le prix des contrats à terme (forward, futur, option).

On appelle payoff le gain du contrat obtenu en fin de période (sans tenir compte du prix du contrat).

Exemple : $r = 0$,

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	10	9

Quel prix pour le contrat de payoff:

	ω_1	ω_2	ω_3
X	0	2	1

Trouver une stratégie qui *génère X* (on dit aussi que le contrat est *duplicable*), c.-à-d. $V_1 = X$.

Solution : $H = (6, 1, -1)$ et $V_0 = 1$.

Comment évaluer le prix du contrat de payoff X ?
Si le contrat est *duplicable* alors le raisonnement suivant s'applique:

1. si le prix du contrat p satisfait $p > V_0$ alors on
   - vend le produit financier
   - investit dans la stratégie de réplication H.

   Gain: $p - V_0$. A la fin de la période, on doit founir au client X mais on reçoit X par H.
   Bilan: $p - V_0$ euros.
2. si $p < V_0$ alors on
   - suit la stratégie $-H$
   - achète le produit financier au prix p.

   Gain : $V_0 - p > 0$.
3. si $p = V_0$ on ne peut créer aucun profit sans risque.

Evaluation des contrats

Valorisation d'un contrat financier *duplicable* de payoff X, dupliqué par la stratégie H :

- Si la loi du prix unique est vérifiée alors le prix du contrat est

$$V_0 = H_0 S_0(0) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)$$

- Sous la condition d'absence d'arbitrage, le prix est

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/S_0(1)] \quad \text{où } \mathbb{Q} \text{ est la proba risque neutre.}$$

Remarque : Le prix d'un actif financier ne dépend pas de la probabilité $\mathbb{P}$ de réalisation de chaque scenario, mais seulement de la probabilité risque neutre.

Pour valoriser un contrat financier, il faut donc:

- vérifier que le contrat est duplicable
- calculer la stratégie de réplication ou la probabilité risque neutre.

Exemple : $k = 2$, $N = 1$ et $r = 1/9$.

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$ ω_1	ω_2
0	1	10/9	10/9
1	5	20/3	40/9

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$ ω_1	ω_2
0	1	1	1
1	5	6	4

Pour un payoff

	ω_1	ω_2
X	7	2

le prix du contrat est égal à

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0}] = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{10} = 4.05.$$

X est duplicable: $\frac{10}{9} H_0 + \frac{20}{3} H_1 = 7$ et $\frac{10}{9} H_0 + \frac{40}{9} H_1 = 2$ a pour solution $H = (-7.2, 2.25)$, et on a bien $V_0 = 4.05$.

Stratégie de couverture

Le vendeur qui propose le contrat financier doit être en mesure de fournir le payoff attendu par son client en fin de période.
Comment s'y prend-t-il ?

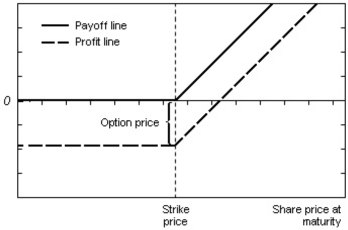
- il vend le produit au prix de 4.05 euros
- il emprunte 7.2 actifs sans risque $(7.2 + 4.05 = 11.25 = 5 * 2.25$ euros)
- il achète 2.25 actifs risqués S_1 au prix de 5 euros.

En fin de période, il a dans son portefeuille:

$$\begin{cases} V_1 = 2.25 * 20/3 - 7.2 * 10/9 = 7 & \text{pour le scenario } \omega_1 \\ V_1 = 2.25 * 40/9 - 7.2 * 10/9 = 2 & \text{pour le scenario } \omega_2 \end{cases}$$

Le vendeur est *couvert*.

Option d'achat européenne (*call*)



On suppose $N = 1$. Le payoff du *call* est donné par:

$$\begin{aligned} X &= (S_1(1) - K)_+ \\ &:= \max\{0, S_1(1) - K\}. \end{aligned}$$

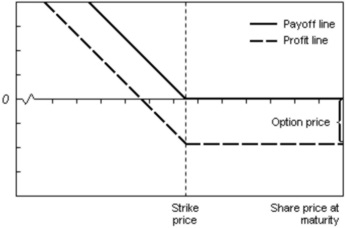
Si le *call* est duplicable, son prix est $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/S_0(1)]$.

En prenant le modèle de prix de l'exemple précédent et $K = 5$, on a

	ω_1	ω_2
X	5/3	0

X est duplicable : stratégie d'investissement $H = (-3, 0.75)$.
On en déduit que le prix est égal à 0.75 euro (de deux façons).

Option de vente européenne (*put*)



Le payoff du *put* est :

$$\begin{aligned} X &= (K - S_1(1))_+ \\ &:= \max\{0, K - S_1(1)\}. \end{aligned}$$

Exercice :

1. En prenant le modèle de prix de l'exemple précédent, calculer le prix du *put* de strike (ou prix d'exercice) $K = 5$.
2. Soit C le prix du *call* de strike K et P le prix du *put* de strike K. Montrer que

$$C - P = S_0(0) - \frac{K}{1+r}.$$

Complétude du marché financier

Pour l'évaluation des prix, il est primordial de pouvoir dupliquer le produit financier étudié.

Un modèle de marché est dit **complet** si tout payoff X peut être généré par une stratégie d'investissement. Sinon le modèle est dit incomplet.

Résultat:

Le modèle de marché est complet $\Longleftrightarrow$ il existe une unique probabilité risque neutre

En toute généralité, il n'est pas possible de déterminer le prix dans un marché incomplet. On ne peut déterminer qu'une *fourchette* de prix.

Exemple de marché incomplet :

n	$S^*_n(0)$	$S^*_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	5	6	4	3

Pour tout $1/2 < \lambda < 2/3$, $\mathbb{Q} = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda)$ est une proba risque neutre.

Dans ce cas, le marché est incomplet. En particulier le payoff X n'est pas duplicable.

	ω_1	ω_2	ω_3
X	6	4	4

$(0, 1)$ est alors la stratégie dont le portefeuille V_1 donne un résultat inférieur à X avec la plus grande valeur V_0 possible, $V_0 = 5$.

$(2, 2/3)$ est la stratégie qui donne un résultat V_1 supérieur à X avec la plus petite valeur V_0 possible c-à-d $V_0 = 5.33$.

Bilan : prix compris entre 5 et 5.33

Modèles à plusieurs périodes

- définition d'un modèle à plusieurs périodes
- martingales et probabilités risque neutre
- notion d'arbitrage
- valorisation des produits financiers

Le modèle

- $T + 1$ date de *trading*, $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T$
- un espace de scenarii $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ ($k < \infty$) décrivant les différents scenarii possibles entre l'instant initial et l'instant final.
- une proba $\mathbb{P}$, avec $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_i) = 1$.
- un compte bancaire (numéraire, actif sans risque) noté $S_0(t)$ dont le rendement sur la période $(t-1, t)$ est:
  $r_t = (S_0(t) - S_0(t-1))/S_0(t-1) \geq 0$.

  Il s'agit d'*intérêts composés* : si $r_1 = 3.5\%$ et $r_2 = 4\%$, alors $S_0(2) = 1.04 \times S_0(1) = 1.035 \times 1.04 \times S_0(0) = 1.0764 \times S_0(0)$.
- N actifs risqués (par ex. différentes actions d'entreprises données).

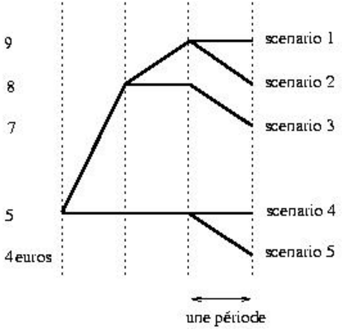
  Le processus des prix est $S_t = (S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t))$ avec $S_n(t)$ le prix du $n$ième actif au temps t.

  On rappelle évidemment que tous les prix sont positifs !

Exemple : modèle à 3 périodes, un actif risqué S_1 et 5 scenarii.

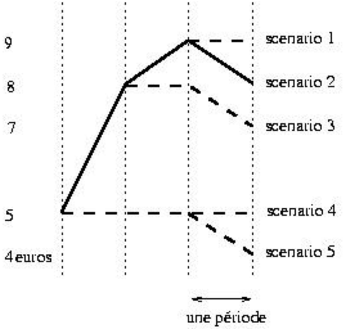
L'arbre (graphique) des prix correspondant est

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2	t=3
ω_1	5	8	9	9
ω_2	5	8	9	8
ω_3	5	8	8	7
ω_4	5	5	5	5
ω_5	5	5	5	4



Exemple : modèle à 3 périodes, un actif risqué S_1 et 5 scenarii.

L'arbre (graphique) des prix correspondant est



$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2	t=3
ω_1	5	8	9	9
ω_2	5	8	9	8
ω_3	5	8	8	7
ω_4	5	5	5	5
ω_5	5	5	5	4

A noter : un investisseur ne connaît que l'historique des prix. A l'instant $t = 2$ on peut savoir si l'on se trouve dans ω_3 mais il est impossible de savoir si l'on se trouve dans ω_1 ou plutôt ω_2

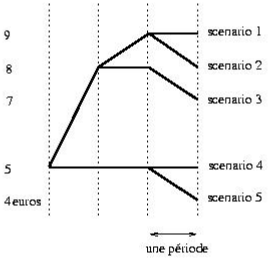
➽ *filtration*

$H(2)$ peut prendre des valeurs différentes sur ω_3 que sur ω_1 et ω_2, mais pas sur ω_1 et ω_2.

Stratégie d'investissement

Une *stratégie d'investissement* $H = (H_0, \dots, H_N)$ est formée de $N + 1$ processus aléatoires $H_n(t)$ (un pour chaque actif) avec $1 \leq t \leq T$.
➽ $H_n(t)$ nombre d'actifs de type n utilisés dans la période $(t-1, t)$.

Remarque : $H_n(t)$ ne peut se baser que sur l'information disponible au temps $t-1$.



Sur cet exemple, on peut par ex. déterminer une stratégie d'investissement qui permette de ne pas perdre d'argent quelque soit le scenario et d'en gagner sur au moins un scenario.

Processus valeurs et gains

La **valeur** V_t du portefeuille est:

- pour $t = 0$

$$H_0(1)S_0(0) + H_1(1)S_1(0) + \ldots + H_N(1)S_N(0)$$

- pour $t = 1, \ldots, T$

$$H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t) + \ldots + H_N(t)S_N(t)$$

V_0: valeur initiale du portefeuille, V_t: valeur du portefeuille à l'instant t **avant de faire la moindre intervention** sur le portefeuille.

En notant $\Delta S_n(t) = S_n(t) - S_n(t-1)$, on définit le **gain du portefeuille**

$$G_t = \sum_{n=0}^{N} \sum_{u=1}^{t} H_n(u) \Delta S_n(u), \quad t \geq 1.$$

Exemple : $r = 1/3$, $S_0(0) = 1$, on considère l'investissement : $H(1) = (-3, 2)$ et $H(2) = (9, 1)$.

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

$$V_0 = H_0(1) + 5H_1(1) = 7$$

$$V_1 = H_0(1)(1+r) + H_1(1)S_1(1)$$
$$= \begin{cases} \frac{4}{3} * (-3) + 8 * 2 = 12 \ (\omega_1,\ \omega_2), \\ \frac{4}{3} * (-3) + 4 * 2 = 4 \ (\omega_3,\ \omega_4). \end{cases}$$

$$V_2 = H_0(2)(1+r)^2 + H_1(2)S_1(2) = \begin{cases} \frac{16*9}{9} + 9 = 25 \ (\omega_1) \\ \frac{16*9}{9} + 6 = 22 \ (\omega_2, \omega_3) \\ \frac{16*9}{9} + 3 = 17 \ (\omega_4). \end{cases}$$

$$G_1 = \begin{cases} rH_0(1) + 3H_1(1) = 5 \ (\omega_1, \omega_2) \\ rH_0(1) - H_1(1) = -3 \ (\omega_3, \omega_4) \end{cases}$$

Les gains sur les deux périodes G_2: 10 pour ω_1, 7 pour ω_2, 19 pour ω_3 et -8 pour ω_4. Notons que $V_2 \neq V_0 + G_2$??...

Stratégie autofinancée

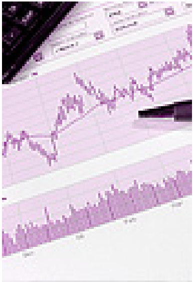
Une stratégie autofinancée est une stratégie ne prenant en compte aucune entrée ou sortie d'argent aux dates de trading $t = 1, \dots, T-1$.

➽ à chaque date de trading, la valeur du portefeuille avant les transactions est égale au portefeuille après les transactions.

Exemple : $r = 1/3$, $S_0(0) = 1$,

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

La stratégie $H(1) = (-3, 2)$ et
$H(2) = (3, 1)$ si $S_1(1) = 8$
$H(2) = (0, 1)$ sinon,
est autofinancée.



La *valeur du portefeuille* pour une stratégie autofinancée est identique avant et après les transactions : constitution du nouveau portefeuille pour la période suivante (trading). Ainsi

$$V_t = H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t) + \ldots + H_n(t)S_n(t),$$

$$V_t' = H_0(t+1)S_0(t) + H_1(t+1)S_1(t) + \ldots + H_n(t+1)S_n(t).$$

Résultat :

une stratégie est autofinancée $\iff V_t = V_t'$ pour tout $t = 1, 2, \ldots T-1$ $\iff$ la valeur du portefeuille satisfait $V_t = V_0 + G_t$ pour tout $t = 1, 2, \ldots, T$.

Actualisation

Les modèles de prix multipériodes doivent être actualisés : tous les prix d'actif doivent être divisés par le prix de l'actif sans risque.

$$S_n^*(t) = S_n(t)/S_0(t)$$

$$V_t^* = H_0(t) + H_1(t)S_1^*(t) + \ldots + H_N(t)S_N^*(t),\ \ t \geq 1,$$

$$G_t^* = \sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t} H_n(u)\Delta S_n^*(u),$$

où $\Delta S_n^*(u) = S_n^*(u) - S_n^*(u-1)$. Alors $V_t^* = \frac{V_t}{S_0(t)}$ et :

Résultat :

une stratégie est autofinancée $\iff V_t^* = V_t'^*$ pour tout $t = 1, \ldots T-1$ $\iff$ la valeur du portefeuille actualisée satisfait $V_t^* = V_0^* + G_t^*$ pour tout $t = 1, 2, \ldots, T$.

Exemple d'actualisation : $r_1 = 1/3$, $r_2 = 1/8$, $S_0(0) = 1$.

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

$S_1^*(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	$8 * 3/4 = 6$	$9 * (3/4) * (8/9) = 9 * 2/3 = 6$
ω_2	5	$8 * 3/4 = 6$	$6 * 2/3 = 4$
ω_3	5	$4 * 3/4 = 3$	$6 * 2/3 = 4$
ω_4	5	$4 * 3/4 = 3$	$3 * 2/3 = 2$

Les martingales

Rappel : Dans les modèles à une période, l'important est de déterminer **une proba risque neutre**, c.-à-d. une proba telle que les prix en début de période soient les moyennes des prix en fin de période. Cela se généralise aux modèles multipériodes.

Une martingale M_t est un processus de prix vérifiant:

> *connaissant les valeurs du processus jusqu'à l'instant t, la valeur en début de période $(t, t+1)$ est la moyenne (espérance) des valeurs en fin de cette période.*

$$\mathbb{E}[M_{t+1} | M_u,\ u \leq t] = M_t.$$

Propriété : $\mathbb{E}[M_{t+s} | M_u,\ u \leq t] = M_t$ pour tous $s, t \geq 0$.

Exemple : Modèle avec un seul actif risqué et 6 scenarii de même probabilité $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \ldots = \mathbb{P}(\omega_6) = 1/6$.

$S_1^*(t)$	t=0	t=1	t=2	t=3
ω_1	7	9	10	13
ω_2	7	9	10	7
ω_3	7	9	7	7
ω_4	7	5	7	10
ω_5	7	5	7	4
ω_6	7	5	1	1

On montre que S_1^* est une *martingale* sous la probabilité $\mathbb{P}$.

Contraintes économiques

Un modèle sera economiquement raisonnable s'il ne contient *aucune opportunité d'arbitrage*, càd une stratégie *autofinancée* qui permette de gagner de l'argent sur certains scenarii et qui n'en perd sur aucun scenario.

Définition:

Une **opportunité d'arbitrage** est une stratégie d'investissement H telle que

- $V_0 = 0$
- $V_T \geq 0$
- $\mathbb{E}[V_T] > 0$
- H est autofinancée.

Exemple : Modèle à deux actifs : un actif sans risque et un actif risqué.

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

1er cas : $S_0(t) = 1$ pour $t = 0, 1$ et 2. Alors pas d'opportunité d'arbitrage.

2ème cas : $S_0(t) = (1+r)^t$ avec $r \geq 12,5$ %, alors on part avec 0 euro, on n'agit pas sur la première période.

Sur la seconde période, on n'agit pas si $S_1(1) = 4$, on agit si $S_1(1) = 8$ avec $H(2) = (\frac{8}{1+r}, -1)$.

- Valeur finale nulle du portefeuille sur ω_3 et ω_4
- $(1+r)8 - 9 \geq 0$ pour ω_1
- $(1+r)8 - 6 > 0$ pour ω_2.

➽ Opportunité d'arbitrage.

Probabilité risque neutre

Définition:

une mesure de probabilité **risque neutre** (ou mesure martingale) est une proba $\mathbb{Q}$ telle que

- $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ pour tout scenario $\omega \in \Omega$
- tous les prix actualisés S_n^* sont des martingales sous $\mathbb{Q}$ (pour tout $n = 1, 2, \dots, N$).

Résultat :

Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage $\iff$ il existe une proba risque neutre.

Exemple : Calcul de la proba risque neutre. $r > 0$.

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

les prix sont des martingales ssi $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n^*(t+s)|S_u,\ u \leq t] = S_n^*(t)$ pour tous $t, s \geq 0$.

$$\begin{aligned} 5(1+r) &= 8[q_1+q_2] + 4[q_3+q_4] \\ 8(1+r) &= (9q_1+6q_2)/(q_1+q_2) \\ 4(1+r) &= (6q_3+3q_4)/(q_3+q_4) \\ 1 &= q_1+q_2+q_3+q_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1+5r}{4}\frac{2+8r}{3} \\ q_2 = \frac{1+5r}{4}\frac{1-8r}{3} \\ q_3 = \frac{3-5r}{4}\frac{1+4r}{3} \\ q_4 = \frac{3-5r}{4}\frac{2-4r}{3} \end{cases}$$

Si $0 \leq r < 1/8$ alors $(q_1, \ldots, q_4)$ définit une proba risque neutre.
Si $r \geq 1/8 = 12,5$ % alors $q_2 \leq 0$, il n'existe pas de mesure martingale.

Valorisation des produits financiers

Trouver le prix d'un produit financier de *payoff* X: mêmes arguments que dans le cas d'une période:

- trouver la stratégie **autofinancée** dupliquant le produit
- le prix à la date t est la valeur de ce portefeuille à la même date.

La valeur du portefeuille est aussi une *martingale*. On peut donc relier la valeur V_t^* à la valeur moyenne finale ($t = T$).

Résultat :

Sous l'AOA, le produit financier de *payoff* X, de maturité T duplicable par V a pour valeur à l'instant t

$$V_t^* = \frac{V_t}{S_0(t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_0(T)}\,\middle|\,S(u),\ u \leq t\right]$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre.

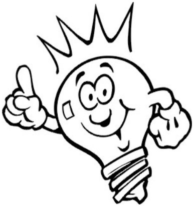
Complétude du marché

Il est primordial de pouvoir dupliquer une option pour connaître son prix.

On appellera un marché **complet** si tous les produits financiers imaginables peuvent être dupliqués.

Résultat:

Il existe une seule probabilité risque neutre, sous laquelle les prix actualisés sont des martingales $\Longleftrightarrow$ le marché sans opportunité d'arbitrage est complet



Si le marché est incomplet, il suffit de trouver la stratégie qui donne la plus grande valeur de portefeuille en fin de cycle minorant la valeur du payoff de l'option. La valeur de ce portefeuille est un minorant du prix. On calcule une fourchette de prix en cherchant un majorant de la même manière.

Exemple de prix du call européen : $r = 0$

$S_1(t)$	t=0	1	2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Payoff de l'option (maturité T, strike 5) :

$$X = (S_1(2) - 5)_+ = \begin{cases} 4 \ (\omega_1) \\ 1 \ (\omega_2, \ \omega_3) \\ 0 \ (\omega_4) \end{cases}$$

Marché complet : la proba risque neutre est $\mathbb{Q} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{12} * 1 + \frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{2} * 0 = 1.$
si $S_1(1) = 8$ alors
$V_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X | S_1(1) = 8] = \frac{2}{3} * 4 + \frac{1}{3} * 1 = 3$
si $S_1(1) = 4$ alors
$V_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X | S_1(1) = 4] = \frac{1}{3}.$

Exercices :

On considère un modèle à deux périodes de prix d'actifs. Le rendement de l'actif sans risque est 2 % sur chacune des deux périodes. Le prix actualisé de l'actif risqué figurant dans le modèle prend les valeurs suivantes

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	100	105	110
ω_2	100	105	102
ω_3	100	102	102
ω_4	100	100	102
ω_5	100	100	99

1. Le marché décrit par ce modèle de prix est un marché
   - comprenant une stratégie dominante ?
   - avec opportunité d'arbitrage ?
   - sans opportunité d'arbitrage non complet ?
   - sans opportunité d'arbitrage complet ?

On considère un modèle à deux périodes de prix d'actifs. Le rendement de l'actif sans risque est 2 % sur chacune des deux périodes. Le prix actualisé de l'actif risqué figurant dans le modèle prend les valeurs suivantes

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	100	105	110
ω_2	100	105	102
ω_3	100	102	102
ω_4	100	100	102
ω_5	100	100	99

2. Le contrat à terme de *pay-off* X, avec $X = 306$ euros si $S_1^*(2) = 102$ et $X = 0$ euro sinon, a pour prix actualisé au temps $t = 1$ et sous l'hypothèse $S_1^*(1) = 100$: ...

On considère le modèle de prix suivant constitué de deux actifs risqués dont les prix actualisés sont donnés par:

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	5	6	7
ω_2	5	5	4
ω_3	5	2	2

S_2^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	4	5	6
ω_2	4	4	2
ω_3	4	3	2

3. On utilise la stratégie d'investissement $H(1) = (-5, 2, 1)$ sur la première période. Parmi les stratégies suivantes proposées sur la seconde période, quelles sont celles qui rendent la stratégie H autofinancée ?

- ◯ $H(2) = (-8.5, 1.5, 2.5)$
- ◯ $(5.5, 2.5, 1.5)$
- ◯ $(8.5, 2.5, 1.5)$
- ◯ aucune d'entre elles

4. La stratégie définie par $H(2)(\omega_1) = (12, 0, 0)$ et $H(2)(\omega_2) = H(2)(\omega_3) = (2, 3, -2)$ est-elle autofinancée ?

On considère le modèle à deux périodes de prix d'actifs suivant: un actif sans risque de rendement nul sur les deux périodes et un actif risqué de prix:

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	5	7	8
ω_2	5	7	5
ω_3	5	4	5
ω_4	5	4	2

5. La probabilité risque neutre de ce modèle est

○ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, \frac{1}{12}\right)$ ○ $\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$

○ $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ ○ autre valeur

On considère le modèle à deux périodes de prix d'actifs suivants : un actif sans risque de rendement nul sur les deux périodes et un actif risqué de prix:

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	5	7	8
ω_2	5	7	5
ω_3	5	4	5
ω_4	5	4	2

6. Le prix de l'option de vente européenne à l'instant $t=0$ de prix d'exercice (strike) 5 euros est 0.66 euros. On s'intéresse à la stratégie de duplication de ce produit financier. Cette stratégie sur la première période vaut

○ $\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ ○ $\left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ○ $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ○ autre valeur.

Bilan :

Les modèles à plusieurs périodes décrivent l'évolution des prix de différents actifs (un actif sans risque, un ou plusieurs actifs risqués) suivant différents scenarii possibles.

Les modèles économiquement acceptables seront ceux *sans opportunité d'arbitrage*, ou de façon équivalente, les modèles ayant une *probabilité risque neutre* c.-à-d. telle que les prix sont des *martingales* sous cette probabilité.

Tous les modèles proposant des prix positifs et satisfaisant ces conditions (plus éventuellement la condition de complétude) peuvent être proposés pour expliquer les prix observés sur le marché et prévoir les prix futurs.

Ils peuvent inclure les fluctuations possibles des prix, mais aussi des événements extrêmes tels les risques de défaut ou de contrepartie.

Modèle binomial

Les modèles binomiaux ont été d'abord proposés par Cox, Ross et Rubinstein (1979).

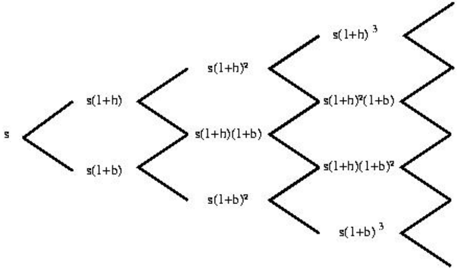
Principe :

- un actif sans risque de rendement r constant sur toutes les périodes (T périodes): $S_0(t) = (1+r)^t$
- un actif risqué $S_1(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Lors d'une période, l'actif risqué est soit multiplié par $(1+h)$ (valeur haute) soit par $(1+b)$ (valeur basse).

Hypothèse *restrictive* mais modèle *intéressant*:

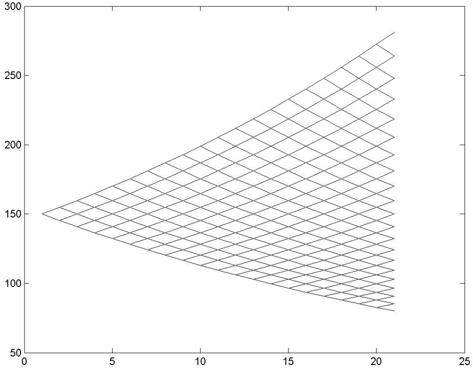
- mathématiquement très simple et permet des calculs explicites
- marché complet
- analogue discret du modèle de Black and Scholes



A la date t, le prix de l'actif risqué peut prendre les valeurs suivantes:

$$S_1(0)(1+h)^t, S_1(0)(1+h)^{t-1}(1+b), \dots, S_1(0)(1+b)^t.$$

Avantage du modèle: 2^T scenarii possibles mais $T+1$ valeurs possibles pour l'actif à l'instant T.



Interpretation du modèle multiplicatif: IBM

Probabilité risque neutre

Pour pouvoir déterminer les prix des contrats en se basant sur le modèle binomial, il faut calculer la probabilité risque neutre.

Sous cette proba, $S_1^*(t)$ doit être une martingale.

Soit p la probabilité pour que le prix, sur la première période passe de $S_1(0)$ à $S_1(0)(1+h)$ et $1-p$ la proba que le prix passe de $S_1(0)$ à $S_1(0)(1+b)$. Alors la condition de *martingale* entraîne:

$$pS_1(0)\frac{1+h}{1+r}+(1-p)S_1(0)\frac{1+b}{1+r}=S_1(0).$$

Cette équation est équivalente à $p(h-b)=r-b$, d'où

$$p=\frac{r-b}{h-b}$$

Remarque : condition sur r $(b<r<h)$.

Probabilité risque neutre

Pour la seconde période, on recommence le même raisonnement : on note p la probabilité pour que le prix passe de $S_1(1)$ à $S_1(1)(1+h)$ et $1-p$ la proba pour le passage de $S_1(1)$ à $S_1(1)(1+b)$.

Comme S_1^* est une *martingale* sous la proba risque neutre, on a

$$pS_1(1)\frac{1+h}{(1+r)^2}+(1-p)S_1(1)\frac{1+b}{(1+r)^2}=\frac{S_1(1)}{1+r}.$$

Cette équation est équivalente à

$$p(h-b)=r-b, \quad \text{d'où} \quad p=\frac{r-b}{h-b}.$$

Cette probabilité est identique à celle obtenue sur la première période et ne dépend pas de la valeur de $S_1(1)$.

Les probabilités, à chaque noeud du réseau, de monter ou de descendre sont identiques, ne dépendent pas de la période ni du prix de départ.

$$q_i = \mathbb{Q}(\omega_i) = p^{N_i}(1-p)^{T-N_i}, \quad p = \frac{r-h}{h-b}$$

où N_i désigne le nombre de montées total pour le prix actualisé sur le scenario i et $T - N_i$ désigne le nombre de descentes.

Exemple de trajectoires

➽ famille des **modèles binomiaux** : la proba que le prix final de l'actif ait une valeur particulière est donné par

$$\mathbb{Q}(S_1(T) = S_1(0)(1+h)^k(1+b)^{T-k}) = C_T^k p^k (1-p)^{T-k}$$
$$= C_T^k \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^k \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{T-k}.$$

Distribution

Evaluation des options

Etude de l'option d'achat européenne (call)

Le payoff du contrat est donné par

$$X = (S_1(T) - K)_+ = \max\{S_1(T) - K, 0\}.$$

La théorie du pricing (AOA) permet de calculer son prix à l'instant $t = 0$:

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{X}{S_0(T)}\Big] = \frac{1}{(1+r)^T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1(T) - K)_+].$$

En utilisant la probabilité risque neutre, on obtient:

$$\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{k=0}^{T} C_T^k p^k (1-p)^{T-k}(S_1(0)(1+h)^k(1+b)^{T-k} - K)_+.$$

En définissant

$$\eta = \inf\{j \geq 0 : \; S_1(0)(1+h)^j(1+b)^{T-j} - K > 0\},$$

le minimum de montées nécessaires dans les T périodes pour être *in the money*, c'est-à-dire pour faire un bénéfice

➽ η est le plus petit entier supérieur à $\frac{\ln(K/(S_1(0)(1+b)^T))}{\ln((1+h)/(1+b))}$.

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=\eta}^{T} C_T^k p^k (1-p)^{T-k} \Big(S_1(0)(1+h)^k(1+b)^{T-k} - K \Big)$$

$$= S_1(0) \sum_{k=\eta}^{T} C_T^k \Big(\frac{p(1+h)}{1+r} \Big)^k \Big(\frac{(1-p)(1+b)}{1+r} \Big)^{T-h} - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, \eta, p)$$

On en déduit $C_0 = S_1(0) B\Big(T, \eta, \dfrac{p(1+h)}{1+r}\Big) - \dfrac{K}{(1+r)^T} B(T, \eta, p)$

avec $B(T,\eta,p) = \sum_{k=\eta}^{T} C_T^k p^k (1-p)^{T-k}$.

Option d'achat européenne

Le prix d'une option d'achat européenne dans le modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein est donné par

$$S_1(0)B\Big(T,\eta,\frac{p(1+h)}{1+r}\Big)-\frac{K}{(1+r)^T}B(T,\eta,p)$$

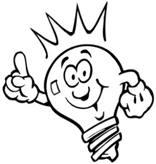
où

$$\eta=\inf\{j\geq 0:\ S_1(0)(1+h)^j(1+b)^{T-j}-K>0\}$$

$$\text{et}\qquad B(T,\eta,p)=\sum_{k=\eta}^{T}C_T^k p^k(1-p)^{T-k}.$$

Il suffit de connaître les paramètres h, b et r.

Méthode de résolution pas à pas



Au lieu de calculer directement C_0, on commence par le prix à $t = T$ puis $T-1$,...

A l'instant T, $C^*_T = (S_1(T) - K)_+/(1+r)^T$

Supposons que l'on observe $S_1(T-1)$ alors à l'instant suivant le prix de l'actif est $S_1(T) = S_1(T-1) * (1+h)$ avec proba p ou $S_1(T) = S_1(T-1) * (1+b)$ avec proba $1-p$ sous la proba risque neutre conditionnelle.

Ainsi $C^*_{T-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1(T) - K)_+/(1+r)^T | S_1(T-1)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*_T | S_1(T-1)]$

De même
$$\begin{aligned} C^*_{T-2} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1(T) - K)_+/(1+r)^T | S_1(T-2)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*_T | S_1(T-1)] | S_1(T-2)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*_{T-1} | S_1(T-2)]. \end{aligned}$$

De proche en proche, on obtient la valeur en $t = 0$: arbre

Il est ainsi possible de connaître l'évolution du prix de l'option au cours du temps en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent.

Dans le cas d'une option d'achat, le prix de l'option augmente lorsque la valeur du sous-jacent augmente.

Les modèles binomiaux permettent aussi de quantifier les contrats financiers de type *américain*: l'option peut être exercée à n'importe quel moment entre le jour d'achat et l'échéance.

➽ A chaque noeud de l'arbre (date de trading), se pose la question:

doit-on exercer son contrat immédiatement ou bien attendre un jour meilleur ?

On fait le choix d'exercer son contrat lorsque le gain moyen futur est inférieur ou égal au gain actuel. call put

Modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black-Scholes est un modèle du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique (aléatoire) continu.

Le modèle de Black-Scholes repose sur un certain nombre de conditions.

- pas d'opportunités d'arbitrage
- le trading s'effectue en continu
- ventes à découvert permises
- pas de coûts de trading ou de taxes
- il est possible d'emprunter ou de placer à un taux sans risque
- tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (ex. on peut acheter 1/100e d'action)
- il n'y a pas de dividendes

On a en choix entre deux méthodes:

- bâtir un modèle continu

- couper l'intervalle de temps $[0, T]$, où T est l'échéance, en N morceaux et appliquer le modèle binomial discret de Cox, Ross et Rubinstein.

➽ *choix de la seconde méthode.*

La discrétisation du modèle continu impose des périodes de plus en plus petites: les paramètres du modèles h, b, r dépendent donc de la période. Pour des petites périodes, le taux d'intéret de l'actif sans risque est **proportionnel à la période**.

Comme le taux est très faible: ce que rapporte un placement sans risque sur plusieurs périodes est proche de ce qu'il rapporte sur une période multiplié par le nombre de périodes.

➠ Rendement de l'actif sans risque $r_N = \frac{\rho T}{N}$, avec ρ le *rendement instantané de l'actif*. Notons que le prix de l'actif sans risque sur la totalité de la période de trading $[0, T]$ est multiplié par $\lim_{N\to\infty}(1 + r_N)^N = e^{\rho T}$.

➠ h et b sont les rendements possibles de l'actif risqué sur une période.

$$\frac{S_1(T)}{S_1(0)} = \frac{S_1(T/N)}{S_1(0)} \frac{S_1(2T/N)}{S_1(T/N)} \cdots \frac{S_1(NT/N)}{S_1((N-1)T/N)}.$$

Chaque fraction peut prendre la valeur $1 + h$ ou $1 + b$

En passant au logarithme, on obtient

$$\ln\left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)}\right) = \ln\left(\frac{S_1(T/N)}{S_1(0)}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{S_1(NT/N)}{S_1((N-1)T/N)}\right)$$

$\ln\left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)}\right)$ est la somme de N variables aléatoires indépendantes de même loi et de variance très petite notée σ_N^2

Il s'ensuit que $\ln\left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)}\right)$ a pour variance $N\sigma_N^2$.

Supposons que $N\sigma_N^2$ (dépendant de $h = h_N$ et $b = b_N$ converge vers $\sigma^2 T$ alors σ est la volatilité instantannée de l'actif risqué càd l'écart-type de son log-rendement

➠ estimation de la volatilité

Rappel sur le théorème central limite:

On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, notée $\{Y_n, n \geq 0\}$. On note m leur moyenne et on suppose que $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y_n) = \mathbb{E}[Y_n^2] - m^2 < \infty$. Alors en notant $S_N = \sum_{i=1}^N Y_n$ on obtient la convergence en loi:

$$\frac{S_N - Nm}{\sqrt{N}\sigma} \to \mathcal{N}(0,1)$$

Un théorème similaire au théorème central limite nous assume que la limite lorsque N tend vers l'infini de la somme des logarithmes dans l'expression ci-dessus converge vers une variable aléatoire gaussienne (loi normale) de variance $\sigma^2 T$.
On en déduit donc que $S_1(T)$ **suit une loi lognormale** qui est le résultat fondamental lié au modèle de Black et Scholes. exemple de Danone

➽ Dans la pratique on prendra

$$(1 + h_N) = (1 + r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}} \quad (1 + b_N) = (1 + r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}.$$

Option d'achat européenne

Le cas continu de Black et Scholes est la limite du prix du modèle binomial lorsque le paramètre N tend vers l'infini. Pour N assez grand,

$$C_0 = S_1(0)B(N, \eta_N, \frac{p_N(1+h_N)}{1+r_N}) - \frac{K}{(1+r_N)^N}B(N, \eta_N, p_N)$$

On rappelle que $B(N, \eta_N, p) = \sum_{k=\eta_N}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$
avec $\eta_N = \inf\{j \geq 0 : \ S_1(0)(1+h_N)^j(1+b_N)^{N-j} - K > 0\}$ le plus petit entier supérieur à

$$\frac{\ln(K/(S_1(0)(1+b_N)^N))}{\ln((1+h_N)/(1+b_N))}.$$

Il faut donc regarder la limite $B(N, \eta_N, p_N)$ lorsque N devient grand.

En fait on peut écrire B comme une probabilité:

$$B(N, \eta_N, p_N) = 1 - \mathbb{P}(Y_N < \eta_N)$$

où Y_N est la somme de N variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p_N.

Une variante du théorème central-limite permet d'obtenir

Résultat

Le prix d'une option d'achat européenne de strike K et d'échéance T est donné par:

$$C = S_1(0)\phi(d) - Ke^{-\rho T}\phi(d - \sigma\sqrt{T})$$

où

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

$$d = \frac{\ln(S_1(0)/K) + \rho T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Remarques:

- résultat similaire pour l'option de vente:
$$P = Ke^{-\rho T}\phi(d + \sigma\sqrt{T}) - S_1(0)\phi(d).$$
- la formule de parité entre le prix du *call* et celui du *put*:
$$C = P + S_1(0) - e^{-\rho T}K.$$
- dépendance par rapport à la volatilité:

  Le but d'une option étant de se couvrir contre des risques de hausse ou de baisse du cours de l'actif, on s'attend à ce que le prix de l'option augmente avec la volatilité de l'actif risqué. De plus, C tend vers $S_1(0)$ (valeur plafond) quand σ croît à l'infini.

➽ Recherche de la volatilité implicite: plutôt que d'estimer la volatilité comme une variance empirique (volatilité historique), on inverse la formule de Black & Scholes afin de retouver la valeur de la volatilité correspondant aux valeurs des puts et des calls échangés sur le marché. Cette volatilité est considérée être une meilleure approximation de la volatilité réelle.

Exercice: Modèle à deux périodes de prix d'actifs. Rendement de l'actif sans risque: 25 % sur chaque période. Prix actualisés des deux actifs risqués :

S_1^*	$t = 0$	1	2
ω_1	5	6	7
ω_2	5	6	5
ω_3	5	4	5
ω_4	5	4	3
ω_5	5	4	2
ω_6	5	1	1

S_2^*	$t = 0$	1	2
ω_1	7	8	10
ω_2	7	8	6
ω_3	7	8	9
ω_4	7	8	8
ω_5	7	8	7
ω_6	7	1	1

1. Le marché décrit par ce modèle de prix est un marché comportant une stratégie dominante, avec opportunité d'arbitrage, sans opportunité d'arbitrage (SOA) non complet, SOA complet ?

S_1^*	$t=0$	1	2
ω_1	5	6	7
ω_2	5	6	5
ω_3	5	4	5
ω_4	5	4	3
ω_5	5	4	2
ω_6	5	1	1

S_2^*	$t=0$	1	2
ω_1	7	8	10
ω_2	7	8	6
ω_3	7	8	9
ω_4	7	8	8
ω_5	7	8	7
ω_6	7	1	1

2. On considère la stratégie d'investissement $H(1) = (-3, 1, 1)$ sur la première période. Quelles sont les stratégies (seconde période) qui rendent la stratégie H autofinancée ?

○ $H(2) = (-1, -1, 4)$ ○ $(4, 4, 1)$
○ $(3, 2, 2)$ ○ $(0, 0, 3)$ ○ aucune

S_1^*	$t=0$	1	2
ω_1	5	6	7
ω_2	5	6	5
ω_3	5	4	5
ω_4	5	4	3
ω_5	5	4	2
ω_6	5	1	1

S_2^*	$t=0$	1	2
ω_1	7	8	10
ω_2	7	8	6
ω_3	7	8	9
ω_4	7	8	8
ω_5	7	8	7
ω_6	7	1	1

3. Le contrat à terme de *payoff* X, avec $X = 12.5$ euros si $S_1^* = 5$ et $X = 0$ euro sinon, a pour prix actualisé au temps $t = 1$ et sous l'hypothèse $S_1^*(1) = 6$:...

On considère le modèle à deux périodes de prix d'actifs suivant: un actif sans risque de rendement nul sur les deux périodes et un actif risqué de prix:

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	5	6	7
ω_2	5	6	3
ω_3	5	2	2

4. La probabilité risque neutre de ce modèle est

- ○ $\left(\frac{3}{16}, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}\right)$
- ○ $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{3}{16}\right)$
- ○ $\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right)$
- ○ autre

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	5	6	7
ω_2	5	6	3
ω_3	5	2	2

5. Le prix de l'option de vente européenne à l'instant $t = 0$ de prix d'exercice (strike) 5 euros est 2.25 euros. On s'intéresse à la stratégie de duplication de ce produit financier. Cette stratégie sur la première période est égale à

○ $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ○ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ○ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{20}\right)$ ○ autre.

Codes et classification					
ISIN	FR0010242511	Mnemo	EDF	CFI	ESVUFB
Marché	EURONEXT PARIS - Euronext - Valeurs locales				
Type	Actions - Action ordinaire - Continu			Compartiment A (Blue Chips)	

TD	08/09/11 11:20 CEST
Achat (€) 20.455	Vente (€) 20.46
Limite ↗ 21.07	Limite ↘ 19.85

Cotation TD		08/09/11 11:20 CEST
Dernier (€) (1)		20.46
Var. J/J-1 (%) (2)		1.29
Volume		379,838
Capitaux		7,730,277
Capitalisation		38,072,215,771
Jour		
Premier (€)	09:00	20.265
+ haut (€)	11:04	20.525
+ bas (€)	09:00	20.20
/31-12		
Variation (%)		-33.34
+ haut (€)	18/02/11	32.75
+ bas (€)	11/08/11	19.42

Intraday | Téléchargement cours

Top management	
Président Directeur Général	Henri Proglio
Directeur Général Délégué	Pierre Lederer
Directeur Général Délégué	Hervé Machenaud
Directeur Général Délégué	Jean-Louis Mathias
Directeur Général Délégué	Thomas Piquemal
Secrétaire Général	Alain Tchernonog
Finances	Thomas Piquemal
Communication	Catherine Gros
Contact Investisseurs	Catherine de Boissezon

Source: COFISEM - Mis à jour: 21/05/11

Actionnariat	
Etat Français	84.48 %
Actionnaires Institutionnels	13.1 %
Salariés	2.39 %
Autocontrôle	0.03 %

Source: COFISEM - Mis à jour: 21/05/11

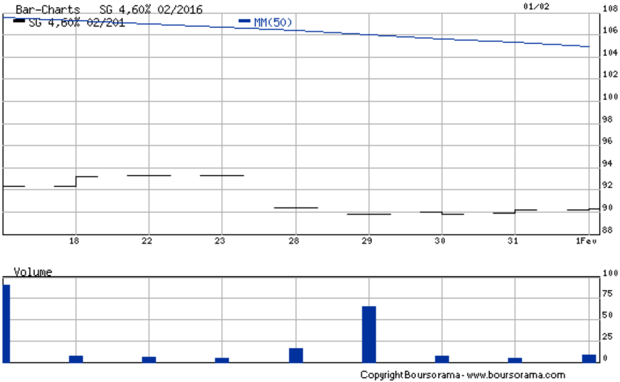
Nombre total d'actions	1,860,812,110
Capitalisation (€)	38,044,303,589

Chiffres clés

Millésime	2010	2009	2008
Chiffre d'affaires*	65 165 000	66 336 000	64 279 000
Résultat d'exploitation*	6 225 000	10 107 000	7 911 000
Résultat net	1 249 000	4 088 000	3 535 000
Capitaux propres	36 903 000	32 725 000	24 842 000
Total de bilan	240 559 008	241 914 000	200 288 000
Fin de l'exercice	12.10	12.09	12.08
Durée de l'exercice (mois)	12	12	12
Devise & Unité	EUR - MILLIERS	EUR - MILLIERS	EUR - MILLIERS
Normes comptables	IFRS	IFRS	IFRS

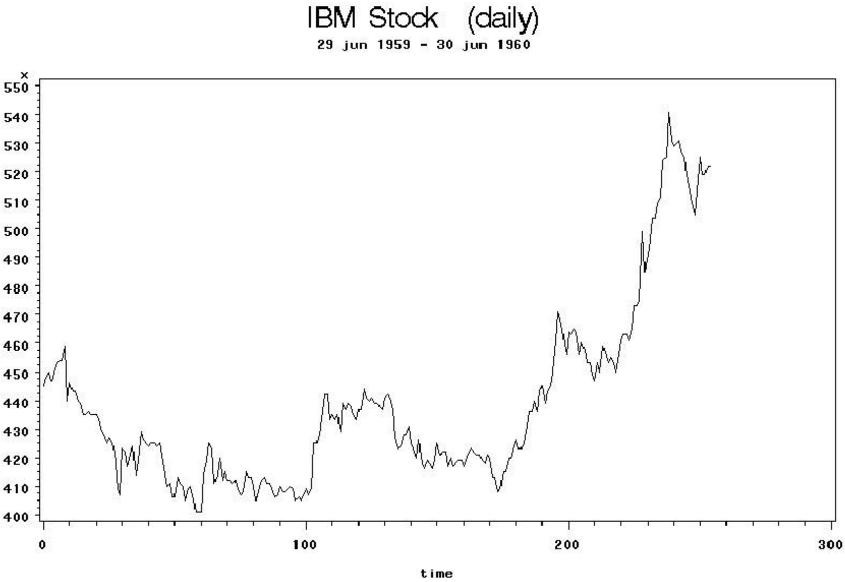
Source: COFISEM - Mis à jour: 21/05/11

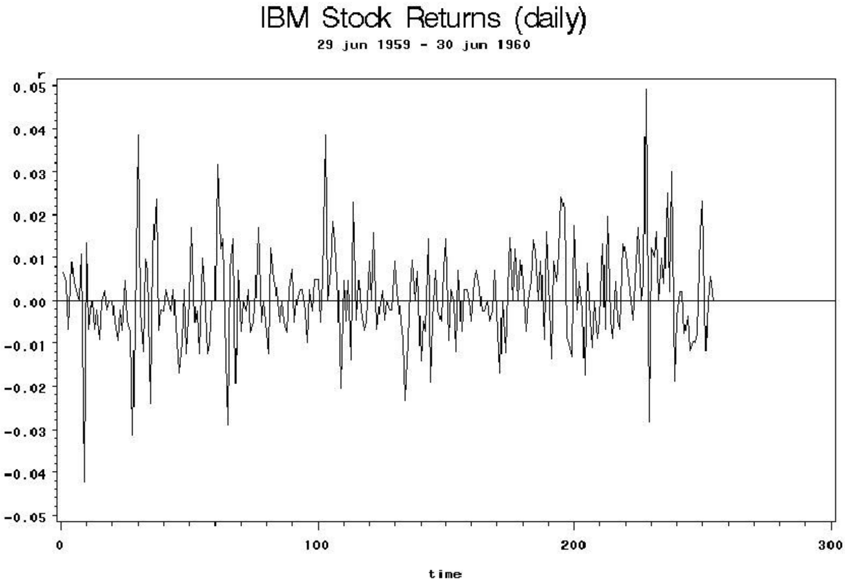
Bar-Charts AREVA (EX CEA-INDUSTRIE CIP) 23/05
AREVA (EX CEA-I
MM(50)
40
38
36
34
32
30
28
Oct
Nov
Dec
Jan11
Fev
Mar
Avr
Mai
Volume
800
600
400
200
0
Milliers
Copyright Boursorama - www.boursorama.com


Bar-Charts SG 4,60% 02/2016
SG 4,60% 02/201
MM(50)
01/02
108
106
104
102
100
98
96
94
92
90
88
18
22
23
28
29
30
31
1Fev
Volume
100
75
50
25
0
Copyright Boursorama - www.boursorama.com

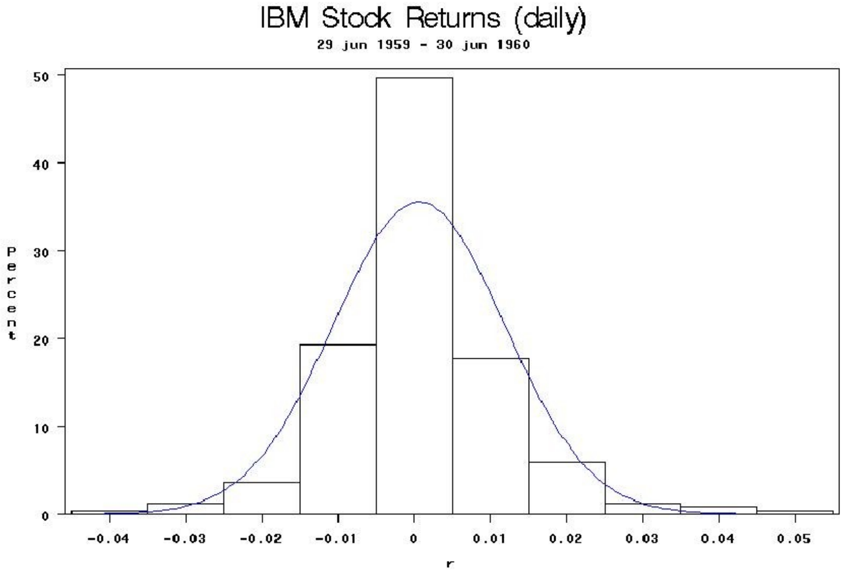
Source : Le Monde

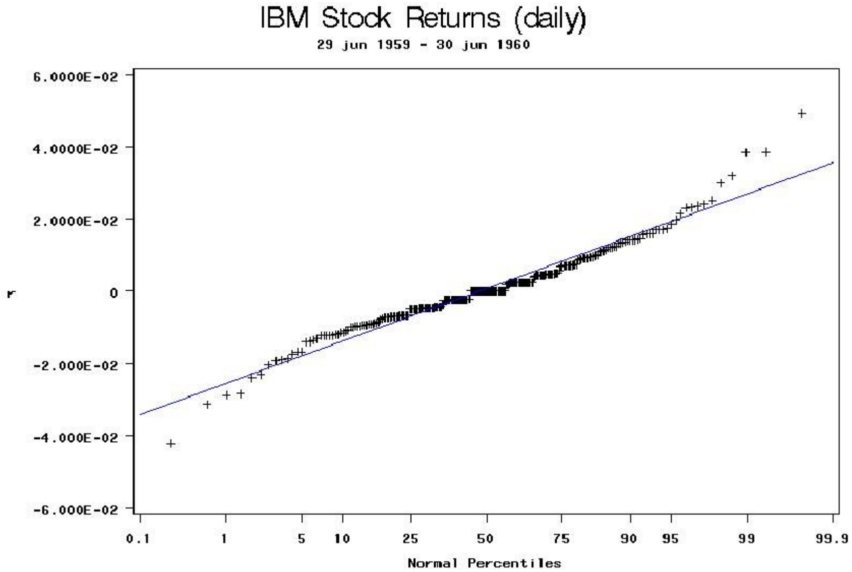
Libellé	Dernier	Var.	clôt. préc	Ouvert.	+ Haut	+ Bas	Vol.
ACCOR	**24.08**	**+ 3.39%**	24.08	23.24	24.10	23.08	486,910
AIR LIQUIDE	**90.26**	**- 0.46%**	90.26	90.04	90.91	89.64	214,704
ALCATEL-LUCENT	**2.46**	**+ 1.24%**	2.46	2.42	2.47	2.41	7,680,915
ALSTOM	**29.34**	**+ 1.17%**	29.34	29.00	29.42	28.76	317,343
ARCELORMITTAL	**14.11**	**+ 1.95%**	14.11	13.92	14.16	13.85	3,120,368
AXA	**10.37**	**+ 3.49%**	10.37	9.98	10.44	9.97	3,533,574
BNP PARIBAS ACT.A	**33.06**	**+ 4.50%**	33.06	32.35	33.50	32.00	2,353,356
BOUYGUES	**26.04**	**+ 1.38%**	26.04	25.62	26.14	25.52	598,006
CAP GEMINI	**25.42**	**- 1.61%**	25.42	25.71	25.94	25.16	594,979
CARREFOUR	**16.91**	**+ 1.38%**	16.91	16.68	16.98	16.61	1,223,588
CREDIT AGRICOLE	**5.93**	**+ 3.20%**	5.93	5.80	5.98	5.70	3,500,729
DANONE	**45.26**	**- 2.66%**	45.26	45.65	45.84	44.68	1,591,818
EADS	**21.84**	**- 0.16%**	21.84	21.79	21.88	21.40	413,860
EDF	**20.44**	**+ 1.21%**	20.44	20.26	20.52	20.20	382,071
ESSILOR INTL.	**55.87**	**- 0.21%**	55.87	55.89	55.97	55.51	132,668
FRANCE TELECOM	**12.39**	**+ 1.98%**	12.39	12.12	12.44	12.07	4,227,313
GDF SUEZ	**20.60**	**+ 0.51%**	20.60	20.38	20.70	20.36	1,444,968
L'OREAL	**73.86**	**+ 1.60%**	73.86	72.60	73.90	72.35	360,141
LAFARGE	**27.34**	**+ 1.75%**	27.34	26.92	27.43	26.66	365,730
LVMH	**115.35**	**+ 0.74%**	115.35	113.90	115.85	113.60	237,624
MICHELIN	**47.48**	**+ 1.11%**	47.48	47.18	47.66	46.78	207,024
NATIXIS	**2.66**	**+ 5.00%**	2.66	2.55	2.67	2.52	2,531,470
PERNOD RICARD	**62.12**	**+ 1.06%**	62.12	61.43	62.14	61.04	219,455
PEUGEOT	**18.71**	**+ 0.94%**	18.71	18.64	18.84	18.40	900,186
PPR	**110.00**	**+ 1.06%**	110.00	108.80	110.00	108.00	69,777
PUBLICIS GROUPE SA	**31.98**	**+ 0.68%**	31.98	31.74	32.12	31.58	116,087
RENAULT	**26.09**	**+ 1.22%**	26.09	25.95	26.30	25.67	570,282
SAINT GOBAIN	**32.57**	**+ 1.48%**	32.57	32.10	32.77	31.88	524,521
SANOFI	**49.96**	**+ 0.08%**	49.96	49.88	50.27	49.50	628,989
SCHNEIDER ELECTRIC	**42.24**	**+ 0.33%**	42.24	41.91	42.37	41.65	548,127
SOCIETE GENERALE	**20.08**	**+ 3.64%**	20.08	19.70	20.25	19.50	2,248,945
STMICROELECTRONICS	**4.32**	**+ 0.96%**	4.32	4.30	4.34	4.22	1,345,630
SUEZ ENVIRONNEMENT	**11.38**	**+ 1.24%**	11.38	11.20	11.42	11.16	139,714
TECHNIP	**67.01**	**+ 1.70%**	67.01	66.22	67.40	65.99	153,790
TOTAL	**33.50**	**+ 1.98%**	33.50	32.84	33.72	32.77	1,951,585
UNIBAIL-RODAMCO	**146.15**	**+ 1.18%**	146.15	144.05	146.50	143.60	98,570
VALLOUREC	**60.43**	**+ 1.46%**	60.43	59.51	60.66	59.02	179,530
VEOLIA ENVIRON.	**11.06**	**+ 2.45%**	11.06	10.85	11.14	10.82	858,205
VINCI	**34.64**	**+ 1.09%**	34.64	34.15	34.80	34.02	369,423
VIVENDI	**15.95**	**- 0.72%**	15.95	15.90	15.98	15.70	1,922,660

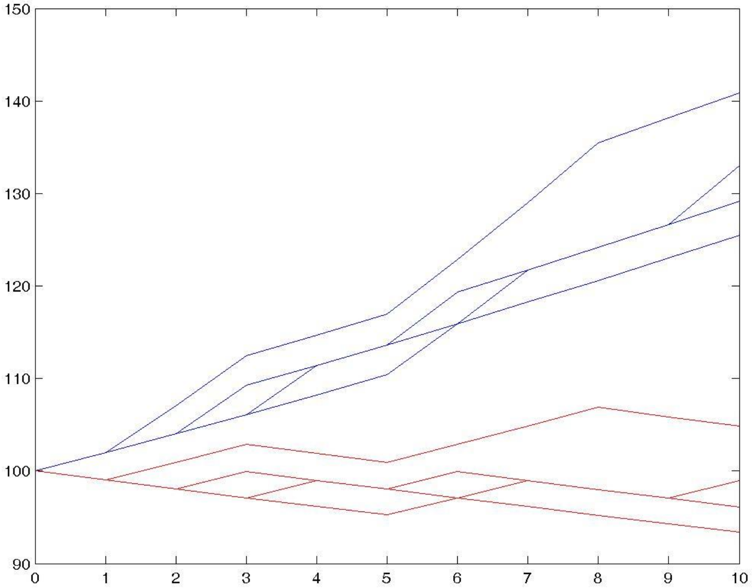

IBM Stock (daily)
29 jun 1959 - 30 jun 1960
x
550
540
530
520
510
500
490
480
470
460
450
440
430
420
410
400
0
100
200
300
time

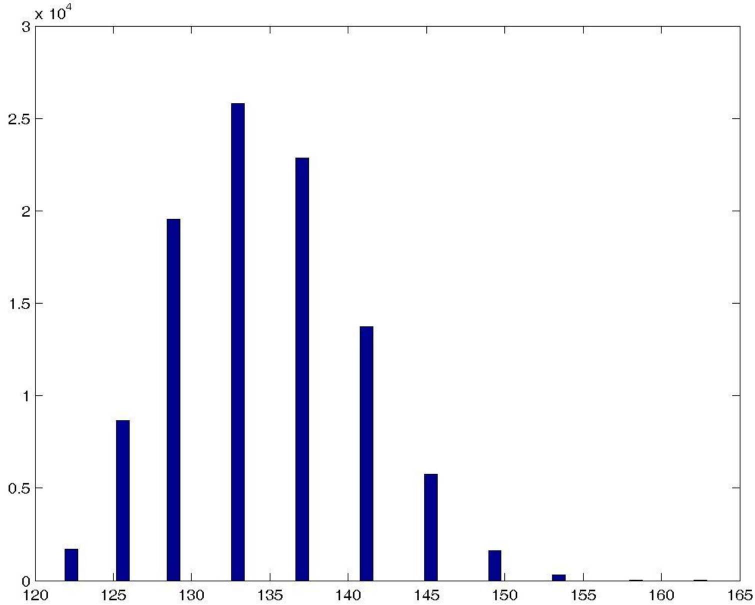


IBM Stock Returns (daily)
29 jun 1959 - 30 jun 1960
r
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
0
100
200
300
time

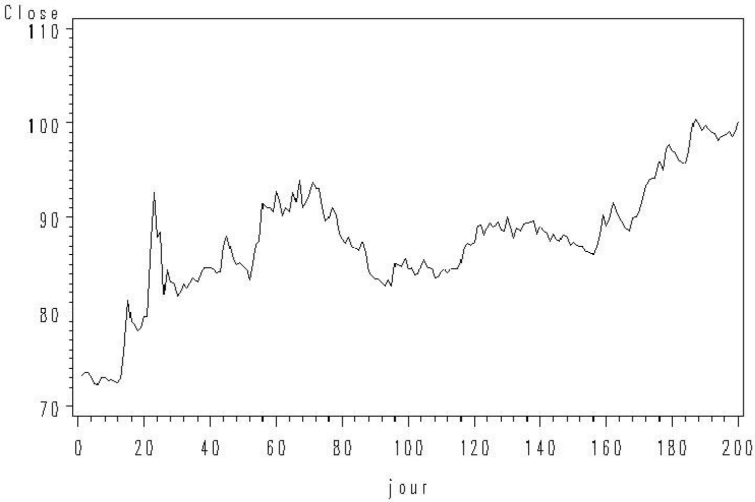

IBM Stock Returns (daily)
29 jun 1959 - 30 jun 1960
Percent
0
10
20
30
40
50
-0.04
-0.03
-0.02
-0.01
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
r


IBM Stock Returns (daily)
29 jun 1959 - 30 jun 1960
6.0000E-02
4.0000E-02
2.0000E-02
0
-2.000E-02
-4.000E-02
-6.000E-02
r
0.1
1
5
10
25
50
75
90
95
99
99.9
Normal Percentiles

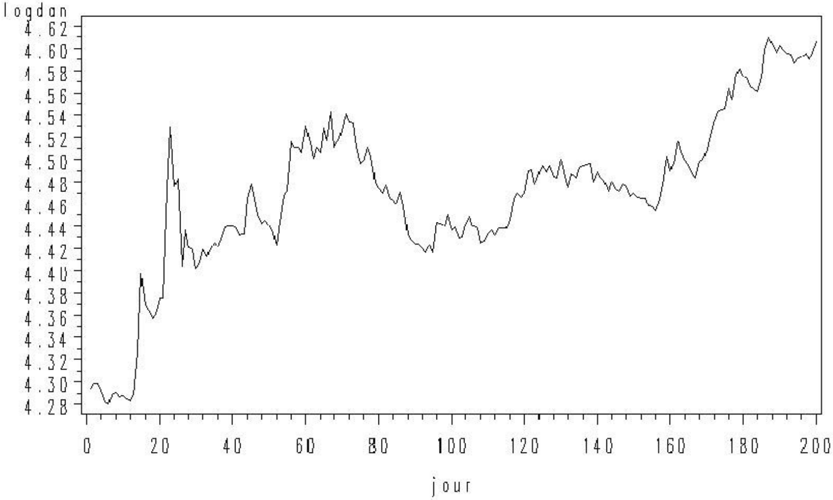

150
140
130
120
110
100
90
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

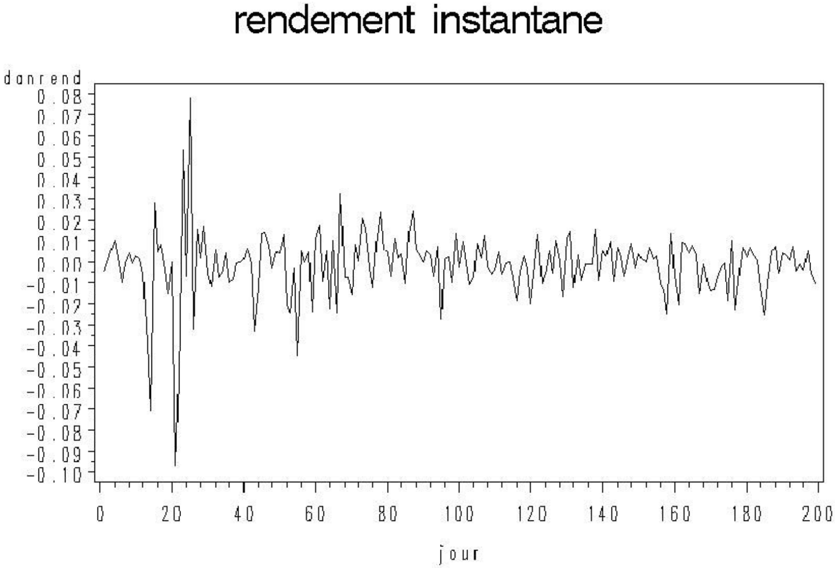

x 10^4
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
120
125
130
135
140
145
150
155
160
165

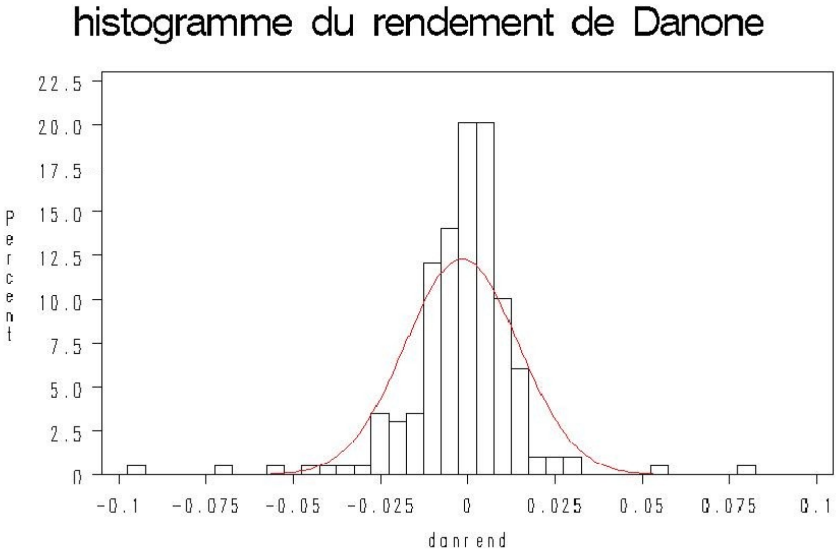
Action Danone de mars 2005 a mars 2006



log de la chronique




rendement instantane
danrend
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
-0.06
-0.07
-0.08
-0.09
-0.10
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
jour


histogramme du rendement de Danone
22.5
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0
Percent
-0.1
-0.075
-0.05
-0.025
0
0.025
0.05
0.075
0.1
danrend