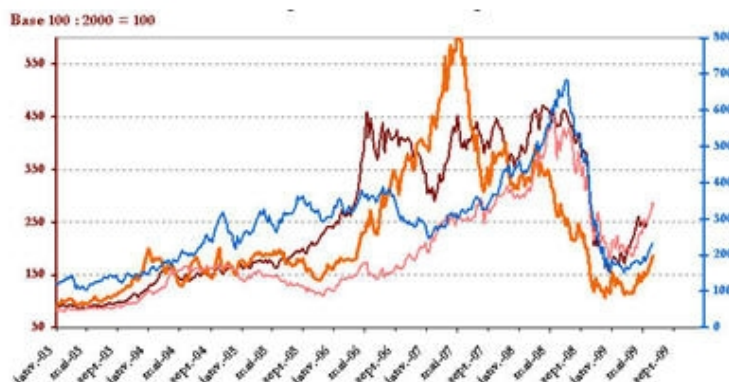


Introduction à la finance quantitative

présenté par Nicolas Champagnat
IECL et Inria



Contents

1	Introduction aux marchés financiers	2
1.1	Rôle des marchés financiers	2
1.2	Les différents types de marchés	2
1.3	Les produits disponibles sur les marchés financiers	3
1.3.1	Les actions	3
1.3.2	Les obligations	4
1.3.3	Les contrats à termes et les produits contingents ou produits dérivés . .	5
2	Modèles à une période	8
2.1	Définition d'un modèle de prix	8
2.2	Arbitrage et autres considérations économiques	11
2.3	Evaluation des contrats	16
2.4	Complétude du marché	20
3	Modèles à plusieurs périodes	21
3.1	Le modèle	21
3.2	Filtration	22
3.3	Stratégie d'investissement	23
3.4	Les martingales	26
3.5	Opportunités d'arbitrage et probabilité risque neutre	28
3.6	Valorisation des produits financiers	30
4	Modèle de Cox-Ross-Rubinstein	31
4.1	Calcul de la probabilité risque neutre	32
4.2	Evaluation du prix d'une option d'achat européenne	33
4.3	Méthode itérative du calcul du prix des options	34
5	Modèle de Black et Scholes	36

1 Introduction aux marchés financiers

Le but de cette introduction est de présenter brièvement les principaux contrats et produits qui s'échangent aujourd'hui sur les marchés financiers. Ces contrats sont de plus en plus nombreux : devises, matières premières, actions, obligations, titres dérivés, taux, énergie, options climatiques... Cette introduction sera succincte et ne sera pas exhaustive. Elle doit permettre dans un premier temps de se convaincre de la nécessité d'introduire des modèles quantitatifs mathématiques pour évaluer le prix des différents contrats.

1.1 Rôle des marchés financiers

Les marchés financiers ont deux rôles essentiels :

- *Mettre en relation directe les demandeurs et les pourvoyeurs de fonds présents dans un économie donnée*, dans un objectif d'allocation de capital et financement de l'économie. Les marchés permettent à chacun d'optimiser ses flux de revenus dans le temps, en échangeant l'argent qu'on a "en trop" à certaines périodes, pour obtenir de l'argent aux périodes où on en aura besoin. Actuellement le financement par crédit bancaire n'est plus prédominant, il ne s'agit donc plus d'une économie d'endettement mais plutôt d'une économie de marchés financiers : les entreprises qui cherchent des fonds font appel directement aux marchés financiers par l'émission d'actions ou d'obligations.
- *Permettre de gérer les risques économiques et financiers* en les partageant ou les échangeant entre les intervenants, grâce à l'utilisation de produits plus ou moins complexes, les *produits dérivés* (ou produits contingents, ou contrats à terme). Ce second rôle est essentiel et spécifique à la finance, et a pris une importance croissante ces trente dernières années.

Exemple : vous envisagez d'acquérir un bien aux Etats-Unis dans 6 mois et vous avez déjà signé le contrat : vous savez donc exactement la somme en dollars dont vous devrez vous acquitter. Il va falloir vous prémunir contre la hausse du dollar vis à vis de l'euro. Pour ce faire, vous avez (au moins) deux possibilités : vous disposez déjà de l'argent nécessaire et vous achetez aujourd'hui les dollars qui vous serviront à honorer votre contrat, dans ce cas vous risquez de perdre beaucoup d'argent si le cours du dollar venait à chuter ; ou alors vous achetez des options sur devises pour vous assurer de pouvoir acheter dans six mois les dollars nécessaires à un prix raisonnable.

1.2 Les différents types de marchés

On distingue essentiellement deux grandes familles de marchés :

- *Les marchés de gré à gré (OTC, over the counter en anglais)*, qui sont ni réglementés, ni localisés sur un lieu précis. Il s'agit de négociations bilatérales, directement entre deux institutions financières, pour des prix et des transactions directement déterminés entre les deux contreparties. Bien que la transaction s'accompagne d'un contrat, l'absence de réglementation et d'organisme de contrôle produit bien sûr des risques (notamment le risque de contrepartie, c.-à-d. de défaut d'un des intervenants avant l'échéance du contrat, par exemple pour cause de faillite ou de dépôt de bilan). Parmi les différents marchés de gré à gré, l'un des plus importants est :

- *le marché interbancaire* : c’est le marché où les professionnels du secteur bancaire échangent entre eux des actifs financiers (emprunts ou prêts) à court terme, et où la banque centrale intervient également pour apporter ou reprendre des liquidités. C’est donc aussi le marché permettant à la Banque centrale (la BCE pour la zone Euro) d’équilibrer le bilan des banques commerciales en cas de crise de liquidités. Les taux d’emprunts sur le marché interbancaires sont publiés chaque jour (ex : l’EURIBOR “EUROpean InterBank Offered Rate” pour la zone Euro) et sont considérés comme les plus stables et les moins risqués.
- *Les marchés organisés*, réglementés et localisés (bourse), où le prix des actifs est unique et connu, les transactions standardisées et le risque de contrepartie géré (ex : par la chambre de compensations pour la bourse de Paris). Parmi eux, on distingue :
 - *Le marché primaire* : le marché du “neuf”. C’est le lieu où sont émis les titres (obligations, actions) et où les agents émetteurs (État, entreprises...) sont mis en relation avec les investisseurs. Les cours d’émissions sont *fixés* par l’émetteur.
 - *Le marché secondaire* : le marché de “l’occasion”. C’est la *bourse* en tant que telle, où les actifs financiers déjà émis sont échangés, et où les prix fluctuent en fonction de l’offre et la demande. Les intervenants font des offres d’achat ou de vente à des prix fixés, qui sont inscrites dans le *carnet d’ordre*, à partir duquel les offres d’achat et de vente sont appariées. Les transactions ainsi opérées déterminent le prix des actifs affichés par les bourses.

Par ailleurs, ces marchés peuvent être de plusieurs types, en fonction des différents actifs financiers échangés, dont on rappellera les principaux dans la prochaine section :

- Marchés des changes (Forex) : échange de devises les unes contre les autres
- Marchés monétaire : dettes à court terme (maturité de moins d’un an)
- Marchés obligataire : dettes à moyen et long terme (maturité de plus d’un an)
- Marchés action : marché des titres de propriété des entreprises (par exemple, NYSE Euronext, qui contient la bourse de Paris, LSE, Deutsche Börse...)
- Marchés de produits de base ou matières premières (*commodities* en anglais) : or, pétrole, blé, cacao... (par exemple NYMEX, CME, Liffe)

1.3 Les produits disponibles sur les marchés financiers

Parmi toutes les valeurs échangées sur les marchés financiers (valeurs mobilières, excluant les matières premières) on distingue trois grands types de produits :

1.3.1 Les actions

Il s’agit de titres de propriété représentant une fraction du capital d’une entreprise et donnant à son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit à l’information et aux bénéfices (dividendes). Il existe en réalité une grande diversité d’actions.

Elles portent une valeur nominale de capital, qui, rapporté à la valeur nominale totale des actions émises détermine la part de capital représentée par l’action, et donc les droits du détenteur aux assemblées.

Le prix (ou valeur) de l'action est le résultat de l'offre et la demande. Il n'a en général rien à voir avec sa valeur nominale, et représente la valeur du patrimoine de l'entreprise et la confiance des investisseurs dans l'apport de dividendes futurs et dans la croissance de l'entreprise.

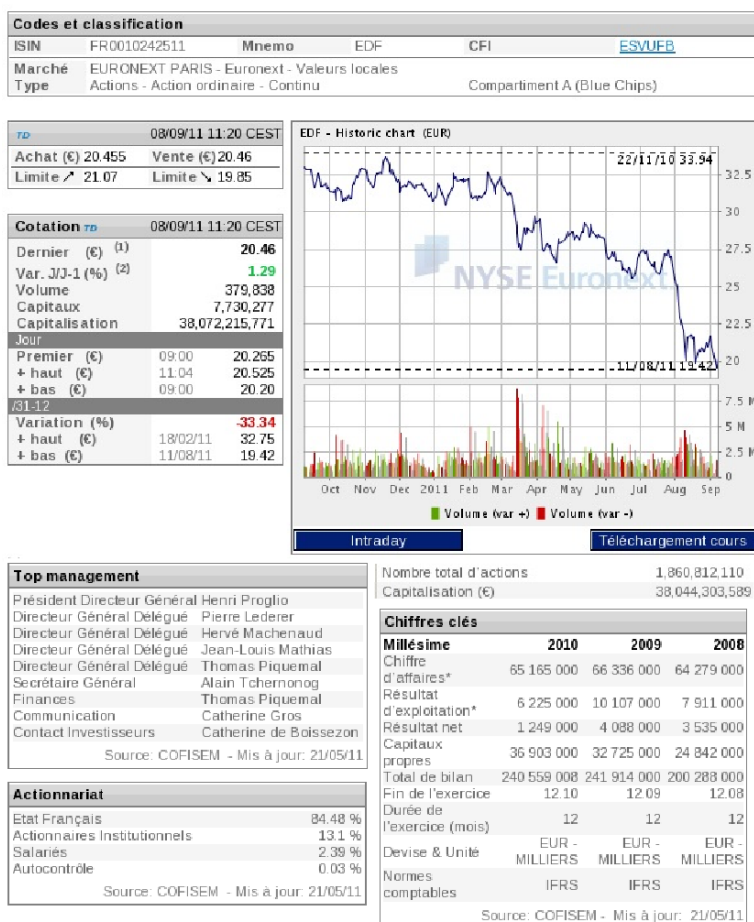
Exemple de données liées à l'action EDF page suivante (source euronext.com).

1.3.2 Les obligations

Il s'agit de titres financiers qui matérialisent l'engagement d'un emprunteur envers un prêteur qui, en contrepartie, met des fonds à sa disposition. Cet engagement prévoit un échéancier de flux financier, les modalités de remboursement des fonds et un mode de rémunération.

Les caractéristiques d'une obligation sont :

- son émetteur (société X)



- le montant total émis (100 millions d'euros)
- le montant nominal (ou valeur faciale) (1000 euros) et/ou le nombre d'obligations émises (100 000)
- sa date d'échéance
- son échéancier de paiement de *coupons* d'intérêt et de capital (mensuel, trimestriel, semi-annuel, annuel, bi-annuel, closes spécifiques pour le premier et le dernier coupons)
- le type de taux d'intérêt : taux fixe ou taux variable (par exemple indexé sur l'EURIBOR 6 mois)

- les modalités de remboursement du capital (In fine, par séries égales ou par annuités constantes).

Lorsque le prix d'émission est égal à la valeur nominale de l'obligation, l'émission est dite au pair. Mais l'obligation peut-être émise soit en dessous (cas le plus fréquent), soit au dessus de la valeur nominale. La différence entre la valeur nominale et le prix d'émission constitue alors la prime d'émission.



Exemple 1 : L'obligation assimilable du Trésor 4.75% 25/4/2035, dont la détention unitaire (on dit aussi : valeur nominale) est d'un euro, est un contrat par lequel la République française s'engage à verser au détenteur du dit contrat :

- chaque année le 25 avril 0,0475 euro (4,75% d'un euro), entre maintenant et le 25 avril 2035 inclus,
- plus 1,00 euro le 25 avril 2035.

Le prix auquel ce contrat se négocie actuellement est la valeur actuelle de l'obligation. Il doit tenir compte d'un certain nombre de risques, notamment le risque de crédit, c.-à-d. le risque de défaut du vendeur de l'option.

Les obligations émises par les états les moins endettés des grands pays développés sont considérées comme les plus sûres, notamment à cause du pouvoir fiscal qui leur permet de faire face à leur dette. Les exemples récents des USA, de la Grèce et de l'Italie tendent à remettre en cause ce dogme.

1.3.3 Les contrats à termes et les produits contingents ou produits dérivés

Les contrats à terme servent à acheter ou à vendre un instrument sous-jacent à un moment précis dans le futur et à un prix donné.

Ils sont apparus sous leur forme actuelle dans la deuxième moitié du XIXe siècle aux États-Unis sur les marchés de céréales (maïs, blé, avoine...) puis, devant le succès de la formule, ont été progressivement mis en place pour un grand nombre de produits de base, matières premières et produits agricoles : or, argent, pétrole, gaz naturel, soja, bétail, coton... Ces différents produits constituent *l'instrument sous-jacent* (ou plus simplement *le sous-jacent*) sur lequel est construit le contrat financier.

Au cours des années 1970, ils ont été étendus à des produits uniquement financiers (devises, taux d'intérêt). Ils ont connu une croissance remarquable sur les taux d'intérêts et ont depuis été adaptés aux indices et actifs boursiers (cf. <http://www.guide-finance.ch>).

- Acheter (prendre une position longue) un contrat à terme vous engage à acheter l'actif sous-jacent à une date ultérieure.
- Vendre (prendre une position courte, à découvert) un contrat à terme vous engage à vendre l'actif sous-jacent à une date postérieure.

De nombreux produits classiques comportent aujourd'hui des parties optionnelles et sont donc devenus des produits dérivés.

Voici les quelques contrats les plus courants :

- *Le forward* est le produit dérivé le plus simple. Il s'agit d'un contrat d'achat ou de vente d'un actif (sous-jacent) à une date future fixée (maturité) pour un prix convenu à l'avance. Ces contrats sont passés entre deux institutions, de gré à gré, et ne s'échangent pas sur le marché.

Exemple 1 : le 1er avril, contrat *forward* pour 100 oz (once) d'or le 1er juillet à 450 \$ oz

Le 1er juillet, prix 1 oz d'or = 500 \$.

L'individu avec position *long* :

achat de 100 oz à 450 \$: -45 000 \$;

vente de 100 oz à 500 \$: 50 000 \$.

L'individu avec position *short*:

achat de 100 oz à 500\$: -50 000 \$;

vente de 100 oz à 450 \$: 45 000 \$.

L'individu en position *long* fait des profits lorsque le prix du sous-jacent augmente.

- *Les futurs* sont identiques aux *forwards*, excepté pour le fait qu'ils sont négociables sur les marchés. Ce sont des contrats de vente ou d'achat à une date future fixée d'un sous-jacent pour un prix fixé à l'avance.

Il existe toute une panoplie de contrats dont les caractéristiques sont prédéterminées en fonction des besoins exprimés par les agents économiques (cf. <http://www.fimarkets.com>) :

- Le sous-jacent peut être une matière première (commodity) : blé, pétrole, métaux... ou un instrument financier : taux, cours, indice boursier...
- La quantité (dans le cas des commodities) ou le nominal (produits financiers)
- Le mode de cotation (en pourcentage ou en valeur)
- La variation minimale du prix (le *tick*)
- Les échéances
- Le mode de liquidation : par livraison du sous-jacent (le moins fréquent) ou en cash.

Exemple : le Winefex est un contrat futur sur le vin de Bordeaux lancé en 2001 par Euronext. Bien qu'ayant eu peu de succès, il nous servira d'exemple concret.

- Le sous-jacent est du vin de Bordeaux primeur choisi parmi des appellations connues voire prestigieuses (Saint-Estèphe, Margaux...)
- La quantité d'un contrat est fixée à 5 caisses de 12 bouteilles de 75cl
- La cotation est exprimée en Euro par bouteille
- La variation minimale du cours est de 0.1 Euro par bouteille soit 6 Euro par contrat
- Les échéances sont fixées en Novembre, Mars, Mai, Juillet et Septembre
- La liquidation du contrat peut se faire par livraison effective du vin par le vendeur ou bien en cash au prix de clôture de l'échéance

- *Les options ou produits dérivés* recouvrent une large gamme de produits très différents. Ils ont été introduits sur un marché organisé pour la première fois en 1973. La grande différence entre les options et les futures est la suivante :
 - le contrat forward ou future établit l’obligation d’acheter ou de vendre à la maturité ;
 - l’option donne le *droit* d’acheter ou de vendre à la maturité.

Les deux exemples fondamentaux d’options sont :

- l’option d’achat (*call*) donne à son détenteur le droit d’acheter à une date future un actif pour un prix déterminé à l’avance ;
- l’option de vente (*put*) donne à son détenteur le droit de vendre à une date future un actif pour un prix déterminé à l’avance.

On appelle *strike* le prix d’achat à l’échéance du sous-jacent d’un call et le prix de vente d’un put.

L’option peut être exercée lorsque l’achat ou la vente est effectivement réalisée, ou non-exercée lorsque cette transaction n’est pas intéressante pour le détenteur de l’option. Un *call* sera exercé si le prix à l’échéance du sous-jacent est supérieur au strike, et inversement pour un *put*.

La livraison peut également être effective ou en cash. Dans le cas des produits dérivés, la livraison en cash consiste à effectuer à l’échéance l’échange d’argent nécessaire pour que l’achat (pour un *call*) ou la vente (pour un *put*) du sous-jacent puisse être effectué sur le marché au prix convenu dans le produit dérivé. Ce montant est appelé *payoff* de l’option. Lorsque l’option n’est pas exercée, il n’y a pas d’échange d’argent et le payoff est nul. Si elle est exercée, l’émetteur de l’option paiera au détenteur la différence entre le prix réel de la transaction prévue au contrat et le strike. Par exemple, pour un *call*, si le prix du sous-jacent à l’échéance est supérieur au strike, le payoff est égal à la différence, sinon il est nul. Pour un *put*, si le prix du sous-jacent à l’échéance est inférieur au strike, le payoff est égal à la valeur absolue de la différence, sinon il est nul. Notons que le payoff d’une option est toujours positif ou nul, sinon le détenteur de l’option n’a aucun intérêt à l’exercer.

On peut également définir le payoff dans le cas des contrats futur ou forward, égal au prix du sous-jacent à l’échéance moins le strike (qui est effectivement le montant échangé à l’échéance entre l’individu en position courte et l’individu en position longue). Dans ce cas, le payoff peut être positif ou négatif.

De façon générale, le payoff est défini comme le montant échangé à l’échéance entre l’émetteur d’un contrat à terme et le détenteur de ce contrat, lorsque la livraison du contrat s’effectue *en cash*. Plus précisément, la livraison en cash correspond au cas où un montant est échangé à l’échéance entre les deux signataires du contrat de sorte que la transaction prévue au contrat (par exemple, l’achat du sous-jacent pour le contrat futur) puisse être effectuée au prix prévu au contrat (pour le contrat futur, si le prix réel est plus grand, alors l’acheteur reçoit la différence de la part du vendeur, s’il est plus petit, c’est le vendeur qui reçoit la différence de la part de l’acheteur).

Exemple 2 : option jusqu’au 1er juillet d’achat de 100 actions de Alcan à 20 \$ l’action. Prix spot (au moment de la signature du contrat) de Alcan : 21 \$ l’action, prix de l’option 132 \$.

On distingue de plus les options suivant la date d'exercice :

- une option est dite *européenne* si elle ne peut s'exercer que le jour de sa maturité ;
- elle est dite *américaine* si elle peut s'exercer à n'importe quel moment avant sa date de maturité.

Conclusion : la plupart des contrats échangés sur les marchés financiers prennent en compte l'aléa du futur : ces contrats déterminent à quel prix les sous-jacents peuvent s'échanger à une date ultérieure. Evidemment nous n'avons aucune possibilité de déterminer de façon sûre ce que l'avenir nous réserve. Il nous faut donc, pour évaluer justement le prix de ces contrats, mettre en place des modèles mathématiques qui vont permettre d'appréhender rigoureusement l'aléa.

2 Modèles à une période

Pour les lecteurs qui ne seraient pas familiers avec les modèles stochastiques discrets et l'algèbre linéaire élémentaire, un rappel des résultats et notions utiles dans la suite se trouve sur ma page web <http://iecl.univ-lorraine.fr/~Nicolas.Champagnat/enseignement.html>

2.1 Définition d'un modèle de prix

Le but de cette section est de construire une famille de *modèles* acceptables sur une période donnée. Les modèles à une période ne représentent évidemment pas de façon réaliste les marchés financiers mais leur simplicité mathématique permet d'illustrer la plupart des phénomènes financiers.

Un modèle à une période est défini par les éléments suivants :

- deux dates : l'instant initial $t = 0$ et l'instant final de la période (maturité) $t = 1$ (par souci de simplicité...).
- un ensemble de scénarii $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ ($k < \infty$) décrivant les différentes réalisations possibles dans le futur. Il est bien sûr utopique de penser que le futur peut se décrire par un nombre fini de scénarii mais il s'agit en général d'une bonne approximation, pour peu que le modèle soit suffisamment riche.
- chaque scénario se réalise avec une probabilité strictement positive (nous enlevons dès le départ les scénarii qui n'ont aucune "chance" de se réaliser). On définit alors une probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ et $\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\omega_i) = 1$. La détermination de la liste des scénarii possibles et de la probabilité de chacun est en soi un problème difficile. Certaines familles de modèles sont admises comme étant une approximation raisonnable de la réalité (par exemple le modèle de Black et Scholes), mais le problème de la calibration de leurs paramètres est difficile. De plus, la probabilité de certains événements, comme le défaut d'un des intervenants sur le marché, reste déterminée de façon très imprécise. Nous n'allons pas nous intéresser à ces questions, mais plutôt supposer que le modèle est donné.
- un actif sans risque (compte bancaire) encore appelé *numéraire*. L'actif sans risque est un actif théorique qui rapporte le taux d'intérêt sans risque. Il est en général associé aux emprunts d'État à court terme ou aux taux interbancaires à court terme. Cet actif n'est pas aléatoire : il possède une variance nulle, et il n'est pas corrélé avec les autres

actifs. Son rendement est connu à l'avance. On le note $S_0(t)$ et on supposera toujours par convention que $S_0(0) = 1$. On définit le *rendement* r de cet actif par

$$S_0(1) = S_0(0)(1 + r) = 1 + r.$$

Ainsi en plaçant 1 Euro dans un actif sans risque de rendement 4 %, vous obtenez en fin de période (d'un an, par exemple) $1 * (1 + 0.04) = 1.04$ Euro.

- un processus de prix $S = \{S(t) : t = 0, 1\}$ où $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t))$ avec $S_n(t)$ le prix du n ème actif au temps t .

Exemple 3 : On peut envisager de créer un modèle à une période pour les actifs figurant dans l'indice CAC40 (voir ci-dessous). Ainsi pour chaque actif, il faudra considérer sa valeur à l'instant initial $t = 0$ donnée dans la table figurant sur la page suivante et sa valeur à l'instant final, c'est-à-dire dans un an si la période considérée est 1 an. Dans ce cas :

- S_1 représente le prix de l'action ACCOR : $S_1(0) = 24.08$,
- S_2 représente le prix de l'action AIR LIQUIDE : $S_2(0) = 90.26, \dots$
- ... S_{40} représente le prix de l'action VIVENDI : $S_{40}(0) = 15.95$.

La valeur des actifs à l'instant $t = 0$ est donc entièrement déterminée tandis que celle en fin de période est inconnue de l'investisseur : c'est une donnée aléatoire, l'investisseur sait uniquement qu'il existe différents scénarii qui se réalisent suivant la probabilité \mathbb{P} .

▼ Libellé ▲	Dernier ▼	Var. ▲	clôt. préc	Ouvert. +	Haut +	Bas ▼	Vol. ▲
ACCOR	24.08	+ 3.39%	24.08	23.24	24.10	23.08	486,910
AIR LIQUIDE	90.26	- 0.46%	90.26	90.04	90.91	89.64	214,704
ALCATEL-LUCENT	2.46	+ 1.24%	2.46	2.42	2.47	2.41	7,680,915
ALSTOM	29.34	+ 1.17%	29.34	29.00	29.42	28.76	317,343
ARCELORMITTAL	14.11	+ 1.95%	14.11	13.92	14.16	13.85	3,120,368
AXA	10.37	+ 3.49%	10.37	9.98	10.44	9.97	3,533,574
BNP PARIBAS ACT.A	33.06	+ 4.50%	33.06	32.35	33.50	32.00	2,353,356
BOUYGUES	26.04	+ 1.38%	26.04	25.62	26.14	25.52	598,006
CAP GEMINI	25.42	- 1.61%	25.42	25.71	25.94	25.16	594,979
CARREFOUR	16.91	+ 1.38%	16.91	16.68	16.98	16.61	1,223,588
CREDIT AGRICOLE	5.93	+ 3.20%	5.93	5.80	5.98	5.70	3,500,729
DANONE	45.26	- 2.66%	45.26	45.65	45.84	44.68	1,591,818
EADS	21.84	- 0.16%	21.84	21.79	21.88	21.40	413,860
EDF	20.44	+ 1.21%	20.44	20.26	20.52	20.20	382,071
ESSILOR INTL.	55.87	- 0.21%	55.87	55.89	55.97	55.51	132,668
FRANCE TELECOM	12.39	+ 1.98%	12.39	12.12	12.44	12.07	4,227,313
GDF SUEZ	20.60	+ 0.51%	20.60	20.38	20.70	20.36	1,444,968
L'OREAL	73.86	+ 1.60%	73.86	72.60	73.90	72.35	360,141
LAFARGE	27.34	+ 1.75%	27.34	26.92	27.43	26.66	365,730
LVMH	115.35	+ 0.74%	115.35	113.90	115.85	113.60	237,624
MICHELIN	47.48	+ 1.11%	47.48	47.18	47.66	46.78	207,024
NATIXIS	2.66	+ 5.00%	2.66	2.55	2.67	2.52	2,531,470
PERNOD RICARD	62.12	+ 1.06%	62.12	61.43	62.14	61.04	219,455
PEUGEOT	18.71	+ 0.94%	18.71	18.64	18.84	18.40	900,186
PPR	110.00	+ 1.06%	110.00	108.80	110.00	108.00	69,777
PUBLICIS GROUPE SA	31.98	+ 0.68%	31.98	31.74	32.12	31.58	116,087
RENAULT	26.09	+ 1.22%	26.09	25.95	26.30	25.67	570,282
SAINT GOBAIN	32.57	+ 1.48%	32.57	32.10	32.77	31.88	524,521
SANOFI	49.96	+ 0.08%	49.96	49.88	50.27	49.50	628,989
SCHNEIDER ELECTRIC	42.24	+ 0.33%	42.24	41.91	42.37	41.65	548,127
SOCIETE GENERALE	20.08	+ 3.64%	20.08	19.70	20.25	19.50	2,248,945
STMICROELECTRONICS	4.32	+ 0.96%	4.32	4.30	4.34	4.22	1,345,630
SUEZ ENVIRONNEMENT	11.38	+ 1.24%	11.38	11.20	11.42	11.16	139,714
TECHNIP	67.01	+ 1.70%	67.01	66.22	67.40	65.99	153,790
TOTAL	33.50	+ 1.98%	33.50	32.84	33.72	32.77	1,951,585
UNIBAIL-RODAMCO	146.15	+ 1.18%	146.15	144.05	146.50	143.60	98,570
VALLOUREC	60.43	+ 1.46%	60.43	59.51	60.66	59.02	179,530
VEOLIA ENVIRON.	11.06	+ 2.45%	11.06	10.85	11.14	10.82	858,205
VINCI	34.64	+ 1.09%	34.64	34.15	34.80	34.02	369,423
VIVENDI	15.95	- 0.72%	15.95	15.90	15.98	15.70	1,922,660

Stratégie d'investissement : Une fois le modèle fixé, l'investisseur va définir sa stratégie d'investissement sur la période donnée. Il va donc déterminer combien d'actions il achète ou vend en début de période, puis il va observer en fin de période le résultat de son investissement. Dans un modèle à une période, l'investisseur ne peut intervenir au cours de la période : une fois son choix d'investissement effectué, il doit le laisser figé jusqu'à la fin.

La *stratégie d'investissement* est définie à partir du portefeuille $H = (H_0, H_1, \dots, H_N)$, où

- H_0 est le nombre d'euros investi dans l'actif sans risque
- H_n est le nombre d'unités du n ième actif présent dans le portefeuille. Ce nombre peut être positif ou négatif, une valeur négative apparaissant dans le cas d'un emprunt de titre contre la promesse de le restituer à une échéance future fixée (moyennant commission, pouvant dépendre par exemple de la disponibilité — ou liquidité — du titre, et de sa tendance haussière, mesurée par exemple par les prix des calls sur ce titre) ou d'une position de vente *short* (vente à terme, ou vente à découvert, typiquement la situation d'un émetteur de *futur* ou de *forward* sur le titre).

La **valeur initiale** du portefeuille d'investissement est

$$V_0 = \sum_{n=0}^N H_n S_n(0).$$

La **valeur terminale** du portefeuille en fin de période est *aléatoire* et vaut

$$V_1 = \sum_{n=0}^N H_n S_n(1).$$

Le **gain** obtenu par l'investisseur en utilisant sa stratégie est défini par :

$$G = V_1 - V_0 = \sum_{n=0}^N H_n \Delta S_n, \quad \text{où} \quad \Delta S_n = S_n(1) - S_n(0).$$

Remarquons que dans le cas où $n = 0$ et $S_0(0) = 1$, on a $\Delta S_0 = r$ où r est le rendement de l'actif sans risque.

Actualisation : Le gain d'un portefeuille peut être important mais il ne faut en aucun cas oublier que la valeur de l'argent en fin de période n'est pas la même que celle en début de période. Comme les stratégies d'investissement et les signatures de contrat sont établies à l'instant $t = 0$, il est important d'actualiser les revenus futurs par rapport au numéraire, c'est-à-dire exprimer les revenus par unité de numéraire. Ainsi les **prix actualisés** des actifs sont donnés par :

$$S^*(t) = (S_0^*(t), \dots, S_N^*(t)) \quad \text{où} \quad S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{S_0(t)}.$$

On remarque que le prix de l'actif sans risque est constant au cours du temps $S_0^*(0) = S_0^*(1) = 1$.

De la même façon, on définit la valeur actualisée du portefeuille et le gain actualisé :

$$V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(t),$$

$$G^* = \sum_{n=1}^N H_n \Delta S_n^*.$$

Un calcul simple montre que

$$V_t^* = \frac{V_t}{S_0(t)} \quad \text{et} \quad V_1^* = V_0^* + G^*.$$

Remarquons que, puisque $S_0^*(0) = S_0^*(1) = 1$, comparer V_1^* à V_0^* revient à comparer les revenus obtenus avec la stratégie H avec les revenus qu'on aurait obtenu en investissement tout le portefeuille dans l'actif sans risque.

Exemple 4 : $k = 2$, $r = 1/9$, $N = 1$, $S_0(0) = 1$, $S_1(0) = 5$, $S_1(1)(\omega_1) = 20/3$ et $S_1(1)(\omega_2) = 40/9$. Alors $S_0(1) = 1 + r = 10/9$, $S_1^*(1)(\omega_1) = 6$ et $S_1^*(1)(\omega_2) = 4$. Soit une stratégie d'investissement H alors $V_0 = V_0^* = H_0 + 5H_1$ et

$$V_1 = (10/9)H_0 + H_1S_1(1) \quad \text{et} \quad V_1^* = H_0 + H_1S_1^*(1)$$

$$G = (1/9)H_0 + H_1(S_1(1) - 5) \quad \text{et} \quad G^* = H_1(S_1^*(1) - 5).$$

On a donc $G^* = H_1$ pour le scenario ω_1 et $-H_1$ pour le scenario ω_2 .

Exemple 5 : $k = 3$, $r = 1/9$ et $N = 2$ avec $S_0(0) = 1$.

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

2.2 Arbitrage et autres considérations économiques

Pour pouvoir valider un modèle qui sera par la suite utilisé pour évaluer le prix des produits dérivés, il faut s'assurer en premier lieu que ce modèle satisfait quelques propriétés fondamentales des marchés financiers. Le modèle serait par exemple complètement irréaliste si un investisseur pouvait être certain de faire du profit sur une transaction. Dans ce cas, tous les investisseurs chercheraient à faire cette même transaction. A cause des lois de l'offre et la demande, les prix augmenteraient immédiatement jusqu'à faire disparaître cette possibilité de faire du profit sans risque.

Stratégies dominantes : Une stratégie d'investissement \hat{H} est *dominante* s'il existe une autre stratégie \tilde{H} telle que : les valeurs des portefeuilles sont identiques en début de période

$$\hat{V}_0 = \tilde{V}_0 \quad \text{et} \quad \hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega)$$

pour tous les scenarii $\omega \in \Omega$. Ainsi les stratégies commencent avec une même valeur de portefeuille mais la stratégie dominante est sûre d'avoir de meilleurs résultats quoi qu'il arrive.

Résultat 1 : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe une stratégie dominante
- il existe une stratégie vérifiant $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0$ pour tous les scenarii $\omega \in \Omega$.

Ce résultat repose sur l'idée suivante : si \tilde{H} et \hat{H} permettent de définir une stratégie dominante alors la stratégie d'investissement $H = \hat{H} - \tilde{H}$ va satisfaire $V_0 = 0$ et $V_1 > 0$ pour tous les scenarii.

Un modèle de marché n'est donc par raisonnable d'un point de vue économique s'il existe une stratégie dominante. Cette stratégie permettrait tout simplement de créer de l'argent quel que soit le scenario.

Mesure de valorisation universelle : Pour pouvoir définir de façon précise la valeur d'un contrat financier (dans la suite, une option), c'est-à-dire le prix auquel ce contrat doit pouvoir se négocier à l'instant $t = 0$, on va chercher à reproduire le gain du contrat à l'aide d'un portefeuille. Dans ce cas, le prix de base du contrat sera tout simplement la valeur initiale du portefeuille. Dans ce but, il faut que l'on puisse relier de façon systématique la valeur des portefeuilles à l'instant $t = 1$, c'est-à-dire en fin de période, avec leur valeur à l'instant $t = 0$.

Exemple 5 (suite) : en utilisant l'exemple 5 précédent pour les différents scenarii, on peut se donner un portefeuille V_1^* qui vaut 3 pour le scenario ω_1 , 4 sur le scenario ω_2 et 6 sur le scenario ω_3 . On peut montrer qu'il existe une seule stratégie d'investissement $(12, -1, -1/4)$ qui aboutisse à un tel résultat : la valeur initiale du portefeuille est alors 4.5 Euros.

Une *mesure de pricing linéaire* est définie par $\pi = (\pi(\omega_1), \dots, \pi(\omega_k))$ (avec $\pi \geq 0$) satisfaisant : pour toute stratégie H

$$V_0^* = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) V_1(\omega) / S_0(1).$$

En d'autres termes, la mesure de pricing permet de définir la valeur initiale du portefeuille comme une moyenne pondérée des valeurs actualisées du portefeuille en fin de période. Il est à noter que les poids sont universels : ils ne dépendent pas de la stratégie d'investissement.

Résultat 2 : *les assertions suivantes sont équivalentes :*

- π est une mesure de pricing
- π est une probabilité sur l'espace des scenarii satisfaisant, pour tout $n = 1, 2, \dots, N$,

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega). \quad (1)$$

Ainsi, non seulement la valeur initiale d'un portefeuille quelconque est obtenue comme une moyenne pondérée des valeurs finales, mais les prix des actifs eux-mêmes satisfont cette propriété.

Démonstration En effet, si π est une mesure de pricing alors, en choisissant la stratégie $H = (H_0, 0, \dots, 0)$ on obtient

$$H_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) H_0,$$

ce qui implique que π est une probabilité (la somme vaut 1). Par ailleurs avec une autre stratégie particulière $H = (0, \dots, 0, H_n, 0, \dots, 0)$ on obtient directement (1).

Pour la réciproque, il suffit d'utiliser le fait que tout portefeuille est simplement une combinaison linéaire d'actifs (somme pondérée). \square

Ainsi sous l'existence d'une mesure de pricing, le prix d'un actif à l'instant 0 s'exprime comme une *moyenne* des prix à l'instant 1 sous une certaine vision du monde (probabilité). Cette mesure est vraiment fondamentale dans un contexte économique.

Résultat 3 : *les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe une mesure de pricing*
- *il n'existe pas de stratégie dominante.*

Nous ne donnerons pas la preuve de ce résultat, mais nous nous contenterons d'observer qu'une implication est évidente : s'il existe une mesure de pricing, pour toute stratégie telle que $V_0 = 0$, alors, par définition d'une mesure pricing, la moyenne de la valeur terminale par rapport à la mesure de pricing est nulle :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) V_1(\omega) = S_0(1) V_0 = 0.$$

En particulier, il ne peut pas exister de stratégie dominante.

Comme on va le voir ci-dessous, la mesure de pricing permet de définir sans ambiguïté la valeur initiale d'un portefeuille. Mais une condition plus faible le permettait également...

Loi du prix unique : Un modèle de marché vérifie la *loi du prix unique* s'il n'existe pas deux stratégies différentes \hat{H} et \tilde{H} telles que $\hat{V}_1 = \tilde{V}_1$ pour tous les scénarii et $\hat{V}_0 > \tilde{V}_0$. Ainsi, sous la loi du prix unique, il n'existe aucune ambiguïté sur le prix d'un contrat.

Résultat 4 :

s'il n'existe pas de stratégie dominante, alors la loi du prix unique est vérifiée. La réciproque est fausse.

Démonstration S'il existe deux stratégies \hat{H} et \tilde{H} telles que $\hat{V}_1 = \tilde{V}_1$ pour tous les scénarii et $\hat{V}_0 > \tilde{V}_0$, on définit la stratégie H par

$$H_n = \hat{H}_n - \tilde{H}_n \text{ pour } n = 1, 2, \dots, N \quad \text{et} \quad H_0 = \hat{H}_0 - \tilde{H}_0 - \frac{\hat{V}_0 - \tilde{V}_0}{S_0(0)}.$$

On vérifie facilement que cette stratégie est une stratégie dominante. Ceci donne la première partie du résultat. Pour la deuxième partie du résultat, il suffit d'un contre-exemple, donné ci-dessous. \square

Exemple 6 : $k = 2$, $N = 1$, $r = 1$, $S_0(0) = 1$, $S_1(0) = 10$, $S_1(1)(\omega_1) = 12$, $S_1(1)(\omega_2) = 8$. Pour toute variable aléatoire $X = (X(\omega_1), X(\omega_2))$, une stratégie H est telle que $V_1 = X$ ssi

$$\begin{aligned} 2H_0 + 12H_1 &= X(\omega_1), \\ 2H_0 + 8H_1 &= X(\omega_2). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que ce système a toujours une unique solution, c.-à-d. qu'une seule stratégie peut produire un flux donné. En particulier, la loi du prix unique est vérifiée. D'autre part, la stratégie $H = (10, -1)$ vérifie $V_0 = 0$ et $V_1 = (8, 12)$. C'est donc une stratégie dominante.

Opportunité d'arbitrage : Pour affiner les exigences économiques, il faudrait supposer davantage. Certes il faut éviter les stratégies dominantes, c'est-à-dire des stratégies qui sont gagnantes quel que soit le scénario, mais il faudrait également éviter toute stratégie qui permet de gagner avec une probabilité strictement positive et qui ne peut pas perdre d'argent quel que soit le scénario.

Une *opportunité d'arbitrage* est une stratégie H telle que

- $V_0 = 0$,
- $V_1 \geq 0$ pour tous les scenarii,
- $\mathbb{E}[V_1] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) V_1(\omega) > 0$

Notons que, grâce à la seconde hypothèse ($V_1 \geq 0$), la troisième hypothèse ($\mathbb{E}[V_1] > 0$) est en fait équivalente à l'hypothèse que $V_1(\omega) > 0$ pour au moins un scenario $\omega \in \Omega$.

Un modèle avec opportunité d'arbitrage ne serait pas en équilibre économique : plusieurs investisseurs utiliseraient la même stratégie sans aucun risque, et changeraient de ce fait les prix des actifs.

Résultat 5 :

S'il existe une stratégie dominante alors il existe une opportunité d'arbitrage. La réciproque est fausse.

Exemple 7 : On considère un modèle de prix avec un actif risqué et un actif sans risque. Le rendement de l'actif sans risque est supposé nul et $k = 2$: deux scenarii possibles. La valeur initiale de l'actif risqué est 10 et pour le scenario ω_1 : $S_1(1) = 12$; pour le scenario ω_2 : $S_1(1) = 10$. Dans ce cas, $H = (-10, 1)$ est une opportunité d'arbitrage, en effet $V_0 = V_0^* = 0$ et $V_1 = V_1^* = 0$ ou 2. Par contre, dans cet exemple, il n'existe pas de stratégie dominante car $\pi = (0, 1)$ est une mesure de pricing.



Exercice 1 : $k = 3$, $N = 2$, $r = 0$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

Montrer qu'il existe une stratégie dominante et que la loi du prix unique prévaut.

Probabilité "risque neutre" (ou probabilité neutre face au risque) : Comme nous le verrons ci-dessous, la raison pour le nom de "probabilité risque neutre" est que cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des actifs risqués si les espérances de leurs taux de rendement étaient égales au taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre: aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

Nous avons vu qu'il ne suffit pas vraiment qu'il existe une mesure de pricing pour rendre le marché financier économiquement raisonnable. Il faut exiger plus, notamment que tous les états soient obtenus avec un poids de la mesure de pricing strictement positif.

Une probabilité \mathbb{Q} est appelée *risque neutre* si

- $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ pour tout scenario $\omega \in \Omega$
- \mathbb{Q} est une mesure de pricing, c'est-à-dire $\mathbb{Q}(\omega_1) + \dots + \mathbb{Q}(\omega_k) = 1$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta S_n^*] = \sum_{\omega \in \Omega} \Delta S_n^*(\omega) \mathbb{Q}(\omega) = 0$ pour $n = 1, 2, \dots, N$.

Comme les prix actualisés en début de période sont connus et ne sont donc pas aléatoires, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta S_n^*] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n^*(1) - S_n^*(0)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n^*] - S_n^*(0).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta S_n^*] = 0 \iff \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n^*(1)] = S_n^*(0).$$

La probabilité risque neutre est donc une mesure de pricing qui a pour particularité de donner “un poids” strictement positif à tous les scenarii.

Résultat 6 : *les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *il n'y a pas d'arbitrage*
- *il existe une probabilité risque neutre*

Exemple 8 : Pour $k = 2$, $N = 1$, $r = 1/9$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
0	1	10/9	10/9
1	5	20/3	40/9

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$	
		ω_1	ω_2
0	1	1	1
1	5	6	4

Montrons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. Il suffit de mettre en évidence la probabilité risque neutre, c'est-à-dire de trouver les poids q_1 pour le scenario ω_1 et q_2 pour le scenario ω_2 tels qu'ils soient strictement positifs et $q_1 + q_2 = 1$. Par ailleurs, il nous faut

$$S_1^*(1)(\omega_1)q_1 + S_1^*(1)(\omega_2)q_2 = 5, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 6q_1 + 4q_2 = 5.$$

Il y a donc une unique solution à ce problème : $q_1 = 1/2 = q_2$. Il n'y a donc pas d'opportunité d'arbitrage.

On remarque que pour l'absence d'opportunité d'arbitrage, il faut éviter les situations où $\Delta S^* \geq 0$ pour tous les scenarii avec $\Delta S^* > 0$ pour au moins un scenario et les situations où $\Delta S^* \leq 0$ pour tous les scenarii avec $\Delta S^* < 0$ pour au moins un scenario.

Exemple 9 : $N = 1$, $k = 3$,

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	5	6	4	3

Dans ce cas, la probabilité risque neutre doit satisfaire les relations :

$$\begin{cases} 5 = 6q_1 + 4q_2 + 3q_3 \\ 1 = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

Il y a trois paramètres inconnus et seulement deux équations : il y a donc une infinité de solutions. $q_2 = 2 - 3q_1$ et $q_3 = -1 + 2q_1$ mais comme q_2 et q_3 sont des poids liés à la probabilité

\mathbb{Q} : on doit avoir $0 < q_2 < 1$ et $0 < q_3 < 1$ ce qui entraîne $1/2 < q_1 < 2/3$. Ainsi pour tout $1/2 < \lambda < 2/3$, la probabilité $\mathbb{Q} = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda)$ est une probabilité risque neutre. Il n'y a pas dans ce modèle d'opportunité d'arbitrage.

Exemple 10 :

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Une probabilité risque neutre $\mathbb{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ doit satisfaire

$$\begin{cases} 5 = 6q_1 + 6q_2 + 4q_3 \\ 10 = 12q_1 + 8q_2 + 8q_3 \\ 1 = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

Ce système de relations admet une seule solution $q_1 = q_3 = 1/2$ et $q_2 = 0$, il n'y a donc pas de probabilité risque neutre et par conséquent il existe une opportunité d'arbitrage : il s'agit du portefeuille $H = (0, 4, -2)$. Pour ce portefeuille la valeur initiale est $V_0^* = 0$ et la valeur finale est soit 0 pour les scénarii 1 et 3 soit 8 pour le scénario 2.

Se présentent alors trois situations distinctes :

- il existe une unique probabilité risque neutre
- il existe une infinité de probabilités risque neutre
- il n'existe aucune probabilité risque neutre.

Nous verrons par la suite que la situation standard impliquera l'existence d'une unique probabilité risque neutre.

2.3 Evaluation des contrats

Le but de cette section est de décrire la méthodologie pour évaluer les contrats financiers, disons les options, les produits dérivés. Soit X le *payoff* du contrat financier à la fin de la période, c'est-à-dire l'argent que l'on reçoit ou perd à l'échéance du contrat lorsque la livraison est en cash comme expliqué en section 1.3.3 (rappelons que le *payoff* d'une option est toujours positif, mais que ce n'est pas nécessairement le cas pour un contrat futur ou forward). Autrement dit, l'émetteur d'un contrat à terme promet à son détenteur de verser un *payoff* X à l'échéance. Cette donnée est évidemment aléatoire mais on peut la déterminer scénario par scénario. Quelle est alors la valeur monétaire du contrat, c'est-à-dire le prix demandé initialement par l'émetteur pour l'acquisition du produit dérivé ? Comment peut-on évaluer de façon simple ce prix ?

Par exemple, pour le modèle de prix suivant : $r = 0$,

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	5	6	6	4
2	10	12	10	9

On aimerait connaître dans ce contexte le prix d'un contrat financier qui nous assure le *payoff* suivant :

	ω_1	ω_2	ω_3
X	0	2	1

La théorie du pricing sans arbitrage expliquée ci-dessous indique qu'il existe un unique prix raisonnable et ce prix ne dépend pas du tout de l'aversion du client face au risque !!

On dit que le payoff X est *duplicable* s'il existe une stratégie d'investissement H telle que le portefeuille associé satisfasse $V_1 = X$. On dit alors que H *génère* (ou *duplique*) X . Dans l'exemple ci-dessus $H = (6, 1, -1)$, en d'autres termes, l'investisseur place 6 euros dans l'actif sans risque, achète un actif risqué 1 et emprunte un actif risqué 2. Le résultat obtenu est le suivant :

- sur le scenario 1, l'argent que l'investisseur a placé sur l'actif sans risque reste inchangé: 6 euros, l'actif risqué 1 acheté en début de période vaut en fin de période $1 * 6 = 6$ euros, l'actif 2 emprunté doit être rendu : la perte est donc de $1 * 12$ euros. Au total, l'investisseur a un capital de 0 euros.
- pour le deuxième scenario, le même raisonnement donne un capital de 2 euros
- pour le troisième scenario, le même raisonnement donne un capital de 1 euro.

La stratégie H génère bel et bien le payoff.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ le prix du contrat passé entre l'acheteur et le vendeur soit égal à p avec $p > V_0$ la valeur initiale du portefeuille dont la stratégie génère X . Alors un individu astucieux va vendre le produit financier au prix p à l'instant $t = 0$ et immédiatement investir une partie de l'argent obtenu dans la stratégie de réplication H : il gagne dès le départ la somme $p - V_0$. A la fin de la période, il doit fournir à son client X mais il reçoit également X grâce à sa stratégie d'investissement. Ainsi au total, cet individu a gagné $p - V_0$ euros.

De la même façon, si $p < V_0$ alors un individu astucieux va suivre la stratégie $-H$ en empruntant le portefeuille pour acheter le produit financier au prix p . Le gain sans risque est alors de $V_0 - p > 0$.

Si $p = V_0$ alors on ne peut utiliser la stratégie H pour créer un profit sans risque.

Cela veut-il dire que V_0 est le prix juste du contrat financier considéré ? Pas forcément. Supposons qu'il existe une autre stratégie \tilde{H} telle que $\tilde{V}_1 = X$ mais $\tilde{V}_0 \neq V_0$ alors même si $p = V_0$, un individu astucieux peut utiliser la stratégie \tilde{H} pour faire du profit sans risque. Il est donc primordial de se trouver dans une situation où **la loi du prix unique est vérifiée**.

Dans ce cas, V_0 est le prix juste du contrat (dans l'exemple le prix vaut donc 1 euro).

Si \mathbb{Q} est une probabilité risque neutre alors :

$$\begin{aligned}
V_0 &= V_0^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1^* - G^*] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1^*] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{n=1}^N H_n \Delta S_n^*\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1^*] - \sum_{n=1}^N H_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta S_n^*] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1^*] - 0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1/S_0(1)].
\end{aligned}$$

Remarque : lorsqu'il y a plusieurs probabilités risque neutre la quantité $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1^*]$ est la même pour toutes ces probabilités \mathbb{Q} .

Résultat 7 : La valorisation d'un contrat financier de payoff X duplicable repose sur les principes suivants :

- Si la loi du prix unique est vérifiée alors le prix du contrat est donné par

$$V_0 = H_0 S_0(0) + \sum_{n=1}^N H_n S_n(0) \quad \text{où } H \text{ est la stratégie générant } X.$$

- Sous la condition d'absence d'arbitrage, le prix est

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/S_0(1)] \quad \text{où } \mathbb{Q} \text{ est la probabilité risque neutre.}$$

Un point important est que le prix d'un actif financier ne dépend pas de la probabilité \mathbb{P} , mais seulement de la probabilité risque neutre. Puisque la stratégie de financement duplique l'actif considéré pour tous les scénarii, peu importe la probabilité précise de chaque scénario. C'est en ce sens qu'on dit que le prix de l'actif est indépendant de l'aversion au risque de l'acheteur.

Exemple 11 : $k = 2$, $N = 1$ et $r = 1/9$,

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
0	1	10/9	10/9
1	5	20/3	40/9

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$	
		ω_1	ω_2
0	1	1	1
1	5	6	4

Supposons que le *payoff* du contrat soit

	ω_1	ω_2
X	7	2

alors, à condition que le contrat financier soit duplicable, son prix est égal à

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_0}\right] = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{10} = 4.05.$$

En effet nous avons vu précédemment que la probabilité risque neutre est égale à $\mathbb{Q}(\omega_1) = \mathbb{Q}(\omega_2) = 1/2$.

Il suffit donc de vérifier que X est duplicable. Pour cela il faut constituer une stratégie d'investissement qui permette d'obtenir le même gain que le produit financier X en fin de période. Cela revient à déterminer $H = (H_0, H_1)$ tel que

$$\begin{cases} \frac{10}{9} H_0 + \frac{20}{3} H_1 = 7 \\ \frac{10}{9} H_0 + \frac{40}{9} H_1 = 2 \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution : il n'y a donc qu'une seule stratégie possible ! La solution est $H = (-7.2, 2.25)$.

Cette solution permet de mettre en place une **stratégie de couverture**. En effet, lorsque le vendeur propose le contrat financier il doit s'assurer après la vente d'être en mesure de fournir le payoff attendu par son client en fin de période. Voici comment il va s'y prendre : il vend le produit financier au prix de 4.05 euros puis il emprunte 7.2 actifs sans risque. L'entrée financière est alors $7.2 + 4.05 = 11.25$ euros soit 5×2.25 : il achète donc 2.25 actifs risqués S_1 au prix de 5 euros. A l'instant $t = 1$, en fin de période, il aura dans son

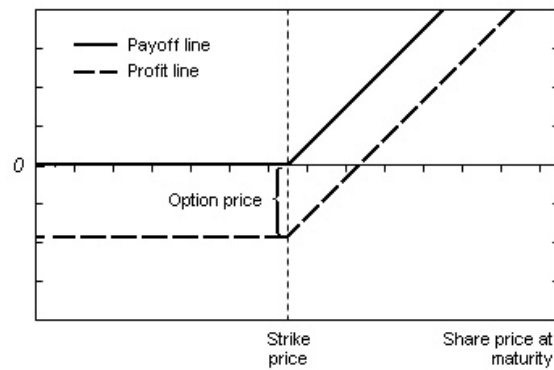
portefeuille :

$$\begin{cases} V_1 = 2.25 \times \frac{20}{3} - 7.2 \times \frac{10}{9} = 7 & \text{pour le scenario } \omega_1 \\ V_1 = 2.25 \times \frac{40}{9} - 7.2 \times \frac{10}{9} = 2 & \text{pour le scenario } \omega_2 \end{cases}$$

C'est exactement l'argent qu'il doit fournir à son client ! Le vendeur est donc couvert.

Exemple 12 : Option d'achat européenne (*european call option*)

Rappel : contrat portant sur une quantité déterminée d'un actif ou d'un autre élément financier (actions, obligations, devises, taux, contrats à terme...) ou d'une marchandise, et, contre le paiement immédiat d'une prime au vendeur, conférant à l'acheteur de l'option d'achat le droit, mais non l'obligation, d'acheter la quantité déterminée de l'élément à une date d'échéance fixée (fin de période) à un prix convenu dès l'origine (prix d'exercice ou *strike* noté K).



On suppose $N = 1$. Comme expliqué en section 1.3.3, le payoff du *call* est donné par :

$$X = (S_1(T) - K)_+ := \max\{0, S_1(T) - K\},$$

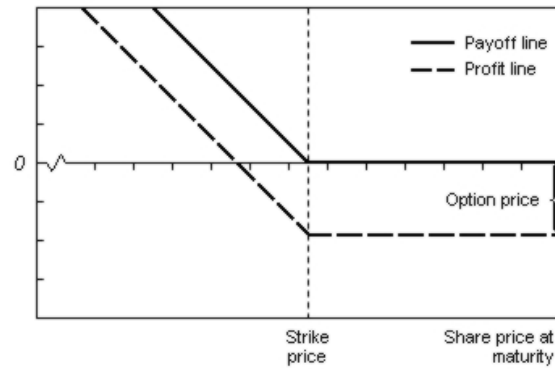
où T est l'échéance du call ($T = 1$ dans notre modèle à une période) et K le strike. Si l'option est bien duplicable, il suffit de calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/S_0(1)]$ pour connaître le prix du call. En prenant le modèle de prix de l'exemple précédent on a :

	ω_1	ω_2
X	5/3	0

Exercice 2 : Montrer que X est duplicable à l'aide de la stratégie d'investissement $H = (-3, 0.75)$. Montrer que le prix du contrat est égal à 0.75 Euro.

Exercice 3 : Le 2 septembre 2004 le prix de cloture de l'action Kellogg était à 41.78 \$. Pour 2.60 \$ vous pouviez acheter une option d'achat de l'action Kellogg avec un prix d'exercice de 40 \$. L'option expirait le 17 décembre 2004.

- Quel droit vous donne cette option ?
- Supposons que vous ayez acheté un call et que vous l'ayez conservé jusqu'à la maturité. Si le prix de l'action Kellogg était de 52 \$ le 17 décembre 2004, auriez-vous exercé votre option ? Quel aurait été votre bénéfice ?
- Si le prix de l'action Kellogg était de 38 \$ le 17 décembre 2004, auriez-vous exercé votre option ? Quel aurait été votre bénéfice ?



Exemple 13 : Option de vente européenne (*European put option*)

Rappel : contrat portant sur une quantité déterminée d'un actif ou d'un autre élément financier (actions, obligations, devises, taux, contrats à terme...) ou d'une marchandise et, contre le paiement immédiat d'une prime au vendeur, conférant à l'acheteur de l'option de vendre le droit, mais non l'obligation, de vendre la quantité déterminée de l'élément, à une date d'échéance fixée $t = 1$, à un prix convenu dès l'origine (prix d'exercice noté K). Le payoff d'une telle option est $X = (K - S_1(1))_+$.

Exercice 4 : Calculer son prix et déterminer la stratégie de couverture pour le modèle de prix de l'exemple 1.

Exercice 5 : parité call-put Soit C le prix de l'option d'achat et P le prix de l'option de vente. Montrer que

$$C - P = S_1(0) - \frac{K}{1+r}$$

si les deux options sont duplicables. Montrer l'assertion suivante : soit les deux options sont duplicables soit aucune des deux options ne l'est.

2.4 Complétude du marché

Dans la description de l'évaluation des prix des produits financiers, il est apparu de manière évidente que l'application de la théorie du pricing en cas d'absence d'opportunité d'arbitrage, exige de pouvoir dupliquer le produit financier étudié.

Un modèle de marché est dit **complet** si tout payoff X peut être généré par une stratégie d'investissement. Sinon le modèle est dit incomplet.

Résultat 8 : *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *le modèle de marché est complet ;*
- *il existe une unique probabilité risque neutre.*

En toute généralité, il n'est pas possible de déterminer le prix d'un produit par la théorie de l'arbitrage dans un marché incomplet. Si le résultat d'un produit financier X n'est pas duplicable alors il est seulement possible de déterminer une fourchette de prix. Le prix de vente du contrat lié à X est alors la plus petite richesse à investir dans un portefeuille tel que sa valeur finale soit plus grande que X quel que soit le scénario.

3 Modèles à plusieurs périodes

Les modèles de prix à une seule période sont très commodes à cause de leur simplicité mais ils ne sont pas vraiment réalistes vis-à-vis des mécanismes économiques qui régissent le marché. Dans la plupart des cas, un investisseur ne va pas attendre la fin du contrat financier pour faire fructifier son argent. Il va agir de façon dynamique en valorisant son contrat tout au long de la durée de vie de l'option. Ainsi un contrat pourra être à nouveau acheté ou revendu à une tierce personne avant l'échéance. Il ne faut donc plus considérer un modèle avec deux instants $t = 0$ et $t = 1$ mais un modèle avec de nombreuses dates de trading (achat et vente de produits en cours) $t = 0, 1, \dots, T$.

3.1 Le modèle

Nous complétons donc le modèle de base en introduisant une dépendance vis à vis du temps. Le modèle est alors constitué de :

- $T + 1$ date de *trading*
- un espace de scénarii $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ ($k < \infty$) décrivant les différents scénarii possibles entre l'instant initial et l'instant final.
- une probabilité \mathbb{P} , c'est-à-dire une certaine description du monde financier : chaque scénario ω_i se réalise avec une probabilité strictement positive $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$. On rappelle que $\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\omega_i) = 1$.
- un compte bancaire (numéraire) défini par $S_0(t)$ dont le rendement sur la période $(t - 1, t)$ est calculé comme suit :

$$r_t = \frac{S_0(t) - S_0(t-1)}{S_0(t-1)} \geq 0.$$

Ce compte bancaire est l'actif sans risque du modèle de prix : en investissant dans cet actif en début de chaque période, le résultat en fin de période est entièrement connu. Par exemple, en investissant 1 euro à l'instant $t = 0$ dans le numéraire dont le rendement (ou l'intérêt) sur la première période est 3.5 %, le capital formé à l'instant $t = 1$ est $S_0(0)(1 + r_0) = 1 * (1 + 0.035) = 1.035$ euro. Si le rendement sur la seconde période est 4 % alors le capital à l'instant $t = 2$ est $S_0(0)(1 + r_0)(1 + r_1) = 1 * (1 + 0.035) * (1 + 0.04) = 1.0764$ euro. Il s'agit donc d'*intérêts composés*.

Exercice 6 : Soit $T = 12$ correspondant à une année, les périodes représentant les différents mois. Calculer l'intérêt équivalent qui s'applique sur chaque période pour obtenir un intérêt annuel de 12 %.

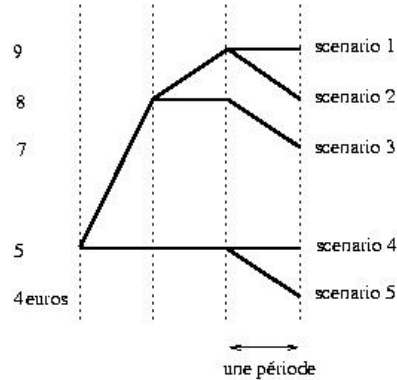
- N actifs risqués correspondants à différentes actions d'entreprises connues. Le processus des prix est alors donné par $S = \{S(t) : t = 0, 1, \dots, T\}$ où $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t))$ avec $S_n(t)$ le prix du n ième actif au temps t . On rappelle évidemment que tous les prix sont des valeurs positives !

Tout modèle de prix peut être représenté par un **graphique** faisant apparaître tous les prix en fonction des différents scénarii.

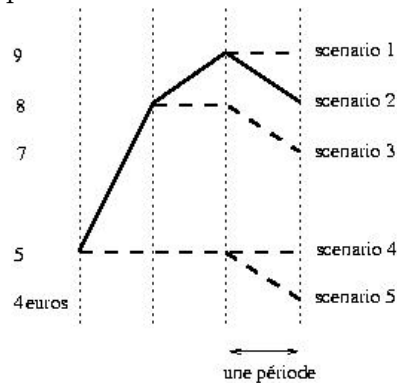
Exemple 14 : Supposons $k = 5$, $N = 1$ et $T = 3$ avec :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2	t=3
ω_1	5	8	9	9
ω_2	5	8	9	8
ω_3	5	8	8	7
ω_4	5	5	5	5
ω_5	5	5	5	4

On en déduit par exemple que l'action à l'instant 2 sur le scenario numéro 3 vaut 8 euros. L'arbre (graphique) des prix correspondant est



On peut détailler un scenario en particulier, par exemple le scenario ω_2 (ici en traits pleins). Chaque scenario correspond à un chemin dans l'arbre ou le graphique.



3.2 Filtration

Il est important de noter qu'un investisseur ne connaît que l'historique des prix, l'*information évolue avec le temps*. Ainsi si un investisseur veut bâtir une stratégie à l'instant $t = 2$ il ne connaît les prix de l'action S_1 que jusqu'à l'instant $t = 2$, en particulier dans l'exemple 14, il peut savoir s'il se trouve dans le scenario ω_3 mais il ne peut en aucun cas savoir s'il se trouve plutôt dans le scenario ω_1 ou plutôt dans le scenario ω_2 . Il ne dispose pas de toute l'information nécessaire. Cette notion de croissance de l'information est primordiale dans la théorie de l'évaluation des prix des produits financiers et s'appelle en probabilité *filtration*.

Un processus $(X(t), t = 0, 1, \dots, T)$, c.-à-d. une variable aléatoire dépendant du temps (par exemple une stratégie d'investissement) est compatible avec l'information des prix disponible au cours du temps (en langage mathématique, on dit *prévisible par rapport à la filtration*) si pour toute date t , et pour tout i, j tels que

$$S_n(s)(\omega_i) = S_n(s)(\omega_j) \quad \forall s \leq t - 1 \text{ et } \forall n,$$

on a

$$X(t)(\omega_i) = X(t)(\omega_j).$$

Autrement dit, lorsque les valeurs des processus de prix coïncident jusqu'à la date $t - 1$, alors les valeurs de $X(t)$ coïncident également.

3.3 Stratégie d'investissement

Une *stratégie d'investissement* $H = (H_0, \dots, H_N)$ est formée de $N + 1$ processus aléatoires $H_n(t)$ avec $1 \leq t \leq T$, compatibles avec l'information des prix au cours du temps (au sens défini juste au-dessus). Ces processus ne commencent que pour $t = 1$ car nous les définissons de la façon suivante : $H_n(t)$ représente le nombre d'actifs de type n utilisés dans la période $(t - 1, t)$. Comme dans le modèle à une période ces quantités peuvent être négatives (il s'agit alors d'emprunter les titres boursiers).

Lien avec l'information disponible : $H_n(t)$ ne peut se baser que sur l'information disponible au temps $t - 1$, c'est-à-dire des prix observés sur le marché entre l'instant 0 et l'instant $t - 1$.

Par exemple, sur le modèle de prix précédent on peut construire une stratégie qui nous permette de gagner de l'argent sans en perdre dans tous les scénarii. Cette stratégie est la suivante : à l'instant $t = 0$ l'investisseur ne fait rien ; à l'instant $t = 1$ si le prix observé est $S_1(1) = 8$ alors il investit dans cet actif risqué, sinon il n'investit pas ; à l'instant $t = 2$, si le prix observé est toujours 8, il revend l'actif et ne fait plus rien. On voit que le bilan de la stratégie est nul pour les scénarii $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ et que le gain vaut 1 dans le scénario ω_1 .

Il s'agit alors bien d'une stratégie d'investissement car elle ne tient compte que de l'historique des prix du marché.

Les processus de gains et valeurs d'un portefeuille : Le processus valeur V_t du portefeuille d'investissement est défini par :

$$V_t = \begin{cases} H_0(1)S_0(0) + H_1(1)S_1(0) + \dots + H_N(1)S_N(0), & \text{pour } t = 0 \\ H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t) + \dots + H_N(t)S_N(t), & \text{pour } t = 1, \dots, T. \end{cases}$$

V_0 représente la valeur initiale du portefeuille, V_t est la valeur du portefeuille à l'instant t **avant de faire la moindre intervention** sur le portefeuille.

On peut également définir la valeur du portefeuille à l'instant immédiatement **après la réallocation du portefeuille** comme

$$V'_t = H_0(t+1)S_0(t) + H_1(t+1)S_1(t) + \dots + H_N(t+1)S_N(t), \quad \text{pour } t = 1, \dots, T - 1.$$

En notant $\Delta S_n(t) = S_n(t) - S_n(t - 1)$, il est possible de définir le **gain du portefeuille** sur la période $(t - 1, t)$ obtenu grâce au n ième actif :

$$H_n(t)\Delta S_n(t), \quad 1 \leq t \leq T.$$

Le **gain cumulé** jusqu'à l'instant t pour le n ième actif s'écrit

$$\sum_{u=1}^t H_n(u)\Delta S_n(u).$$

correspondant aux différents investissements dans le n ième actif. Le **gain total** du portefeuille au cours du temps est alors donné par :

$$G_t = \sum_{n=0}^N \sum_{u=1}^t H_n(u)\Delta S_n(u), \quad t \geq 1.$$

Le gain est donc un processus aléatoire ne dépendant que de l'historique des prix.

Exemple 15 : On suppose que le rendement de l'actif sans risque est constant égal à $r = 1/3$ et $S_0(0) = 1$ (cas standard). Ainsi

$$S_0(t) = (1 + r)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^t.$$

En ce qui concerne l'actif risqué :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Il s'agit d'un modèle à deux périodes, sur la première période l'investisseur utilise la stratégie $H(1) = (-3, 2)$, sur la seconde période il utilise $H(2) = (9, 1)$. La valeur du portefeuille est alors donnée par

$$V_0 = H_0(1) + 5H_1(1) = -3 + 5 * 2 = 7$$

$$\begin{aligned} V_1 &= H_0(1)(1+r) + H_1(1)S_1(1) \\ &= \begin{cases} (1+r)H_0(1) + 8H_1(1) = \frac{4}{3} * (-3) + 8 * 2 = 12 & \text{pour les scénarii } \omega_1 \text{ et } \omega_2, \\ (1+r)H_0(1) + 4H_1(1) = \frac{4}{3} * (-3) + 4 * 2 = 4 & \text{pour les scénarii } \omega_3 \text{ et } \omega_4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= H_0(2)(1+r)^2 + H_1(2)S_1(2) \\ &= \begin{cases} (1+r)^2H_0(2) + 9H_1(2) = \frac{16}{9} * 9 + 9 * 1 = 25 & \text{pour le scenario } \omega_1 \\ (1+r)^2H_0(2) + 6H_1(2) = \frac{16}{9} * 9 + 6 * 1 = 22 & \text{pour les scénarii } \omega_2 \text{ et } \omega_3, \\ (1+r)^2H_0(2) + 3H_1(2) = \frac{16}{9} * 9 + 3 * 1 = 17 & \text{pour le scenario } \omega_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour les gains du portefeuille nous obtenons : le gain sur la première période

$$G_1 = \begin{cases} rH_0(1) + 3H_1(1) = \frac{1}{3} * (-3) + 3 * 2 = 5 & \text{pour les scénarii } \omega_1 \text{ et } \omega_2, \\ rH_0(1) - H_1(1) = \frac{1}{3} * (-3) - 2 = -3 & \text{pour les scénarii } \omega_3 \text{ et } \omega_4. \end{cases}$$

les gains sur les deux premières périodes

$$G_2 = \begin{cases} rH_0(1) + 3H_1(1) + r(1+r)H_0(2) + H_1(2) = 10 & \text{pour le scenario } \omega_1, \\ rH_0(1) + 3H_1(1) + r(1+r)H_0(2) - 2H_1(2) = 7 & \text{pour le scenario } \omega_2, \\ rH_0(1) - H_1(1) + r(1+r)H_0(2) + 2H_1(2) = 19 & \text{pour le scenario } \omega_3, \\ rH_0(1) - H_1(1) + r(1+r)H_0(2) - H_1(2) = -8 & \text{pour le scenario } \omega_4. \end{cases}$$

Notons sur cet exemple que la valeur du portefeuille à la fin des différentes périodes *n'est pas égale* à la valeur initiale du portefeuille augmentée du gain total ! Pourquoi ?...

Stratégies autofinancées : Une stratégie autofinancée est une stratégie ne faisant intervenir aucune entrée ou sortie d'argent aux dates de trading $t = 1, \dots, T - 1$. Ainsi aux instants $t = 1, \dots, T - 1$ la valeur du portefeuille avant les différentes transactions et la valeur du portefeuille juste après ces transactions est la même. La valeur du portefeuille à l'instant t , avant tout trading, est

$$V_t = H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t) + \dots + H_n(t)S_n(t),$$

la valeur après changement (constitution du nouveau portefeuille sur l'intervalle $(t, t + 1)$) est :

$$V'_t = H_0(t+1)S_0(t) + H_1(t+1)S_1(t) + \dots + H_n(t+1)S_n(t).$$

Ainsi une stratégie est autofinancée si

$$V_t = V'_t$$

On peut vérifier en particulier que la stratégie utilisée dans l'exemple 15 n'est pas autofinancée.

Résultat 9 : *les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- une stratégie est autofinancée
- la valeur du portefeuille satisfait à l'équation $V_t = V_0 + G_t$ pour tout $t = 1, 2, \dots, T$
- $V'_t = V_t$ pour tout $t = 1, 2, \dots, T - 1$.

Exercice 7 : Tracer le graphique des prix et calculer les valeurs et gains du portefeuille dans la situation suivante : le rendement de l'actif sans risque est constant égal à $r = 1/4$ et $S_0(0) = 1$. En ce qui concerne l'actif risqué :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	8
ω_2	5	7	8
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Il s'agit d'un modèle à deux périodes, sur la première période l'investisseur utilise la stratégie $H(1) = (4, -2)$, sur la seconde période il utilise $H(2) = (-4, 1)$.

Exercice 8 : modifier la stratégie d'investissement sur la seconde période dans l'exercice précédent pour obtenir une stratégie autofinancée. Calculer alors le nouveau gain du portefeuille.

Prix actualisés : Comme dans les modèles à une période, les modèles de prix multipériodes doivent être actualisés : ainsi tous les prix d'actif doivent être divisés par le prix de l'actif sans risque. Les notations restent similaires à celles utilisées précédemment :

$$S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{S_0(t)},$$

$$V_t^* = \begin{cases} H_0(1) + H_1(1)S_1^*(0) + \dots + H_N(1)S_N^*(0), & \text{pour } t = 0, \\ H_0(t) + H_1(t)S_1^*(t) + \dots + H_N(t)S_N^*(t), & \text{pour } t \geq 1, \end{cases}$$

et

$$G_t^* = \sum_{n=1}^N \sum_{u=1}^t H_n(u) \Delta S_n^*(u),$$

où $\Delta S_n^*(u) = S_n^*(u) - S_n^*(u-1)$. On peut alors vérifier que

$$V_t^* = \frac{V_t}{S_0(t)}$$

et ainsi, on obtient une nouvelle description des stratégies autofinancées :

Résultat 9 bis : *les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- *une stratégie est autofinancée*
- *la valeur du portefeuille actualisée satisfait à l'équation $V_t^* = V_0^* + G_t^*$ pour tout $t = 1, 2, \dots, T$*
- *$(V_t')^* = V_t^*$ pour tout $t = 1, 2, \dots, T-1$.*

Exemple d'actualisation 16 : on suppose que le rendement de l'actif sans risque est donné par $r_1 = 1/3$ et $r_2 = 1/8$. Par ailleurs, $S_0(0) = 1$. En ce qui concerne l'actif risqué :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2	$S_1^*(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9	ω_1	5	$8 * 3/4 = 6$	$9 * (3/4) * (8/9) = 9 * 2/3 = 6$
ω_2	5	8	6	ω_2	5	$8 * 3/4 = 6$	$6 * 2/3 = 4$
ω_3	5	4	6	ω_3	5	$4 * 3/4 = 3$	$6 * 2/3 = 4$
ω_4	5	4	3	ω_4	5	$4 * 3/4 = 3$	$3 * 2/3 = 2$

3.4 Les martingales

Nous avons observé dans le chapitre précédent les modèles de prix à une période qui étaient économiquement viables, c'est-à-dire sans opportunité d'arbitrage. Nous avons alors mis en évidence la notion de probabilité risque neutre : sous cette probabilité particulière, les prix initiaux des actifs sont égaux à la moyenne des prix finaux (espérance). Dans le contexte des modèles multipériodes, il nous faut un concept similaire, sachant que nous sommes en présence de nombreuses périodes.

Définition : *Un processus aléatoire M_t est une **martingale** si, connaissant les valeurs du processus jusqu'à l'instant t , la valeur en début de la période $(t, t+1)$ est la moyenne (espérance) des valeurs en fin de cette période. Et ceci doit être vérifié sur toutes périodes.*

$$\mathbb{E}[M_{t+1} | M_u, u \leq t] = M_t \quad \text{pour } t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Résultat 10 : *Si le processus M_t est une martingale alors il vérifie*

$$\mathbb{E}[M_{t+s} | M_u, u \leq t] = M_t \quad \text{pour tous } s, t \geq 0.$$

Exemple 17 : On considère un modèle avec un seul actif risqué et 6 scenarii de même probabilité sous \mathbb{P} : $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \dots = \mathbb{P}(\omega_6) = 1/6$.

$S_1^*(t)$	t=0	t=1	t=2	t=3
ω_1	7	9	10	13
ω_2	7	9	10	7
ω_3	7	9	7	7
ω_4	7	5	7	10
ω_5	7	5	7	4
ω_6	7	5	1	1

On peut alors montrer que S_1^* est une *martingale* sous la probabilité \mathbb{P} . En effet, pour $t = 0$ on observe $S_1^*(0) = 7$ et on sait qu'à la fin de la première période le prix actualisé de l'actif risqué sera égal à 9 avec probabilité $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_3)$ et égal à 5 avec probabilité $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(\omega_4) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_6)$. Ainsi la moyenne des prix à l'instant $t = 1$ connaissant le prix à l'instant $t = 0$ est égale à $9/2 + 5/2 = 7 = S_1^*(0)$.

Vérifions que le prix actualisé à l'instant $t = 1$ est également la moyenne des prix à l'instant $t = 2$. Premier cas : si $S_1^*(1) = 9$ alors le prix à l'instant $t = 2$ est égal à 10 avec probabilité

$$\mathbb{P}(S_1^*(2) = 10 \mid S_1^*(1) = 9) = \frac{\mathbb{P}(S_1^*(2) = 10 \text{ et } S_1^*(1) = 9)}{\mathbb{P}(S_1^*(1) = 9)} = \frac{\mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2)}{\mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_3)} = \frac{2}{3}$$

ou égal à 7 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Le prix moyen vérifie donc bien la propriété demandée :

$$\mathbb{E}[S_1^*(2) \mid S_1^*(1) = 9] = 10 * \frac{2}{3} + 7 * \frac{1}{3} = 9 = S_1^*(1).$$

Deuxième cas : si $S_1^*(1) = 5$ alors le prix à l'instant $t = 2$ est égal à 7 avec probabilité

$$\mathbb{P}(S_1^*(2) = 7 \mid S_1^*(1) = 5) = \frac{\mathbb{P}(S_1^*(2) = 7 \text{ et } S_1^*(1) = 5)}{\mathbb{P}(S_1^*(1) = 5)} = \frac{\mathbb{P}(\omega_4) + \mathbb{P}(\omega_5)}{\mathbb{P}(\omega_4) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_6)} = \frac{2}{3}$$

ou égal à 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Le prix moyen vérifie donc bien la propriété demandée :

$$\mathbb{E}[S_1^*(2) \mid S_1^*(1) = 5] = 7 * \frac{2}{3} + 1 * \frac{1}{3} = 5 = S_1^*(1).$$

Il reste à faire les vérifications pour la dernière période. Ces vérifications sont laissées en exercice.

Autre méthode (plus rapide) Les calculs précédents sont fastidieux. Il est possible de les simplifier légèrement en considérant les moyennes des accroissements (rappelons que $\Delta S_1^*(t) = S_1^*(t+1) - S_1^*(t)$). Il est facile de vérifier que $S_1^*(t)$ est une martingale si et seulement si les accroissements moyens sachant le passé sont nuls, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[\Delta S_1^*(t) \mid S_1^*(u), u \leq t] = 0 \quad \text{pour } t = 0, 1, \dots, T-1.$$

L'intérêt est que, pour vérifier qu'une espérance conditionnelle est nulle, il n'est pas nécessaire de diviser par le conditionnement. Dans l'exemple précédent, sur la seconde période et conditionnellement à $\{S_1^*(1) = 9\}$, deux valeurs de $\Delta S_1^*(1)$ sont possibles (1 sur les scénarios ω_1 et ω_2 , et -2 sur le scénario ω_3), et le calcul donne

$$\mathbb{E}[\Delta S_1^*(1) \mid S_1^*(1) = 9] = \frac{1 \times \mathbb{P}(\Delta S_1^*(1) = 1 \text{ et } S_1^*(1) = 9) - 2 \times \mathbb{P}(\Delta S_1^*(1) = -2 \text{ et } S_1^*(1) = 9)}{\mathbb{P}(S_1^*(1) = 9)}.$$

Il suffit de vérifier que le numérateur est nul, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(\Delta S_1^*(1) = 1 \text{ et } S_1^*(1) = 9) = 2\mathbb{P}(\Delta S_1^*(1) = -2 \text{ et } S_1^*(1) = 9),$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(\omega_1, \omega_2) = 2\mathbb{P}(\omega_3)$.

3.5 Opportunités d'arbitrage et probabilité risque neutre

Nous avons vu dans le cas d'une seule période que la bonne notion économique était celle d'absence d'opportunité d'arbitrage. Il faut donc redéfinir cette notion dans le cas d'un modèle à plusieurs périodes. Utiliser une opportunité d'arbitrage, c'est trouver une stratégie d'investissement qui ne perd aucun argent quel que soit le scénario et qui va produire de l'argent sur certains (un ou plusieurs) scénarii. Evidemment parmi toutes ces stratégies d'investissement il ne faut considérer que celles qui sont autofinancées : il ne faudrait pas devoir, à une certaine date de trading, injecter de l'argent dans le portefeuille pour pouvoir à la fin de la période obtenir une valeur de portefeuille strictement positive.

Définition : Une **opportunité d'arbitrage** est une stratégie d'investissement H telle que le portefeuille associé satisfasse

- $V_0 = 0$
- $V_T \geq 0$
- $\mathbb{E}[V_T] > 0$
- H est autofinancée.

La définition précédente est équivalente à

$$V_0^* = 0 \quad V_T^* \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[V_T^*] > 0,$$

avec une stratégie autofinancée. En effet il suffit d'utiliser l'actualisation $V_t^* = V_t/S_0(t)$.

Exemple 18 : On considère un modèle à deux actifs : un actif sans risque et un actif risqué. Les prix de l'actif risqué sont donnés par :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

1er cas : si $S_0(t) = 1$ pour $t = 0, 1$ et 2 . Alors il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. En effet, dès que l'investisseur place de l'argent dans l'actif risqué il a une probabilité strictement positive d'avoir un portefeuille de valeur négative à l'étape suivante.

2ème cas : si $S_0(t) = (1+r)^t$ avec $r \geq 12,5\%$, alors en partant avec 0 euro, l'investisseur n'agit pas sur la première période. Sur la seconde partie, il n'agit pas non plus si $S_1(1) = 4$, mais il agit si $S_1(1) = 8$ en se plaçant *short* sur l'actif risqué et en investissant la somme ainsi obtenue dans l'actif sans risque : $H(2) = (\frac{8}{1+r}, -1)$. La valeur finale du portefeuille est donc nulle sur ω_3 et ω_4 et elle vaut :

$$V_2 = \begin{cases} (1+r)^2 H_0(2) + 9H_1(2) = (1+r)8 - 9 \geq 0 & \text{pour } \omega_1 \\ (1+r)^2 H_0(2) + 6H_1(2) = (1+r)8 + 6 > 0 & \text{pour } \omega_2. \end{cases}$$

Il y a donc bien opportunité d'arbitrage.

L'équivalence entre l'existence d'une probabilité risque neutre et la notion d'arbitrage est vérifiée dans les modèles à plusieurs périodes comme elle le fut précédemment. Il nous faut pour cela définir la notion de probabilité risque neutre.

Définition : une mesure de probabilité **risque neutre** (ou mesure martingale) est une probabilité \mathbb{Q} telle que

- $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ pour tout scenario $\omega \in \Omega$
- tous les processus de prix actualisés S_n^* sont des martingales sous la probabilité \mathbb{Q} (pour tout $n = 1, 2, \dots, N$).

Cette définition est effectivement une généralisation de la probabilité risque neutre pour une période : si $T = 1$, le fait que les prix soient des martingales implique :

$$S_n^*(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n^*(1)].$$

Le prix actualisé au début de la période est bien le prix actualisé moyen de la fin de période.

Dans le cas multipériode, la définition nécessite de vérifier les égalités :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_n^*(t+1) | S_u, u \leq t] = S_n^*(t) \quad \text{pour tous } t \geq 0.$$

Exemple 18 (suite) : Le prix de l'actif sans risque est donné par $S_0(t) = (1+r)^t$. Pour déterminer la probabilité risque neutre ($q_1 = \mathbb{Q}(\omega_1), \dots, q_4 = \mathbb{Q}(\omega_4)$), il suffit de vérifier l'égalité précédente qui se traduit par :

$$\begin{aligned} t=0 \quad 5(1+r) &= 8[q_1 + q_2] + 4[q_3 + q_4] \\ t=1 \text{ sachant } S_1(1) = 8 \quad 8(1+r) &= (9q_1 + 6q_2)/(q_1 + q_2) \\ t=1 \text{ sachant } S_1(1) = 4 \quad 4(1+r) &= (6q_3 + 3q_4)/(q_3 + q_4). \end{aligned}$$

En ajoutant la condition $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1+5r}{4} \frac{2+8r}{3} \\ q_2 = \frac{1+5r}{4} \frac{1-8r}{3} \\ q_3 = \frac{3-5r}{4} \frac{1+4r}{3} \\ q_4 = \frac{3-5r}{4} \frac{2-4r}{3} \end{cases}$$

Si $0 \leq r < 1/8$ alors les réels définis précédemment (q_1, \dots, q_4) définissent une probabilité risque neutre car ils sont strictement positifs.

Si $r \geq 1/8 = 12\%$ alors $q_2 \leq 0$, il n'existe pas de probabilité risque neutre.

Résultat 11 : les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage
- il existe une probabilité risque neutre, c'est-à-dire une probabilité sous laquelle tous les prix actualisés sont des martingales.

Exercice 9 : On considère un modèle à deux périodes, à 5 scenarii et dont le rendement de l'actif sans risque vaut $r = 0$. Ce modèle comporte un seul actif risqué

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	6	5	3
ω_2	6	5	4
ω_3	6	5	8
ω_4	6	7	6
ω_5	6	7	8

Déterminer l'ensemble des probabilités risque neutre.

3.6 Valorisation des produits financiers

La théorie de l'arbitrage permet de valoriser les différents contrats financiers établis avec l'échéance T qui correspond à la dernière date du modèle. Evidemment ces contrats ont été signés à l'instant initial $t = 0$ mais tout au long du temps, il est possible pour le détenteur d'un contrat de le revendre à une tierce personne avant la maturité du contrat. Il faut donc définir le prix d'un tel contrat non seulement à l'instant $t = 0$ mais à tout instant entre $t = 0$ et $t = T$. Le prix peut en effet évoluer au cours du temps : en fonction de la valeur du sous-jacent, il est facilement compréhensible qu'un call (par exemple) n'aura pas le même prix en début de vie que lorsque le temps est proche de la maturité.

Par exemple si vous considérez une option d'achat de l'action Crédit Agricole avec une maturité de 6 mois et un strike de 23 euros (son prix spot est 22.09 euros) vous allez payer cette option bien moins chère que si vous la rachetez deux jours avant l'échéance et que le prix de l'action observé à ce moment-là est 26 euros.

Le principe du calcul du prix d'une option est identique à celui utilisé pour les modèles à une période. En connaissant le payoff, c'est-à-dire le résultat de l'option en fonction du scénario, à la date T , on va constituer un portefeuille de titres présents dans le modèle tel que la valeur du portefeuille à l'instant T soit égale au *payoff* de l'option. On dit alors que ce portefeuille duplique l'option. Attention : la stratégie mise en place pour dupliquer l'option doit être une stratégie **autofinancée**! Dans ce cas, la valeur actualisée du portefeuille à l'instant $t = 0, 1, \dots, T$ est exactement le prix de l'option (si ce n'était pas le cas, on pourrait facilement construire des arbitrages comme dans le cas d'une seule période).

S'il existe une probabilité risque neutre, la valeur actualisée du portefeuille satisfait la même propriété que le prix des différents actifs financiers présents dans le modèle : **la valeur du portefeuille est une martingale**. Le fait que la stratégie n'anticipe pas sur l'information future est crucial pour démontrer cette propriété.

Résultat 12 : *Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, un produit financier de payoff X , de maturité T duplicable par un portefeuille V , dont la stratégie est autofinancée, a pour valeur à l'instant t*

$$V_t^* = \frac{V_t}{S_0(t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{S_0(T)} \mid S(u), u \leq t \right]$$

où \mathbb{Q} est une probabilité risque neutre.

La démonstration de ce résultat est identique à celle du Résultat 7 en appliquant le Résultat 10 à la martingale V_t^* .

Exemple 19 : prix d'une option d'achat (call) européenne

On considère un modèle à deux actifs, un actif sans risque de rendement $r = 0$ et un actif risqué décrit par :

$S_1(t)$	t=0	t=1	t=2
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Le payoff de l'option d'achat européenne de maturité $T = 2$ et de strike $K = 5$ est égal à

$$X = (S_1(T) - K)_+ = \max\{S_1(T) - K, 0\} = \begin{cases} 4 & \text{pour le scenario } \omega_1 \\ 1 & \text{pour les scenarii } \omega_2, \omega_3 \\ 0 & \text{pour le scenario } \omega_4. \end{cases}$$

Comme $r = 0$, on vérifie facilement que la probabilité risque neutre est égale à $\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. La valeur du contrat financier à la date $t = 0$ est donc

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{12} * 1 + \frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{2} * 0 = 1.$$

La valeur du contrat à la date $t = 1$ dépend évidemment du prix de l'actif risqué observé à l'instant $t = 1$: si $S_1(1) = 8$ alors

$$V_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X \mid S_1(1) = 8] = \frac{2}{3} * 4 + \frac{1}{3} * 1 = 3,$$

si $S_1(1) = 4$ alors

$$V_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X \mid S_1(1) = 4] = \frac{1}{3}.$$

Exercice 10 : Calculer le prix d'une option de vente pour un strike $K = 6$ à la date $t = 0$ et $t = 1$ en utilisant le modèle de prix de l'exemple 19.

Il est évidemment primordial de pouvoir dupliquer une option pour connaître son prix. Comme dans les modèles à une période, on dira qu'un marché est **complet** si tous les produits financiers imaginables peuvent être dupliqués.

Résultat 13 : *les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe une seule probabilité risque neutre, sous laquelle les prix actualisés sont des martingales*
- *le marché sans opportunité d'arbitrage est complet*

Si l'investisseur se trouve sur un marché non complet, il cherche la stratégie d'investissement qui lui donne la plus grande valeur de portefeuille en fin de cycle minorant la valeur du payoff de l'option. Alors la valeur initiale de ce portefeuille lui fournit un minorant pour le prix de l'option. Pour obtenir un majorant, il lui suffit de trouver une stratégie d'investissement telle que la valeur finale du portefeuille soit la plus petite possible tout en majorant le payoff. Il calcule ainsi une fourchette de prix de l'option.

4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

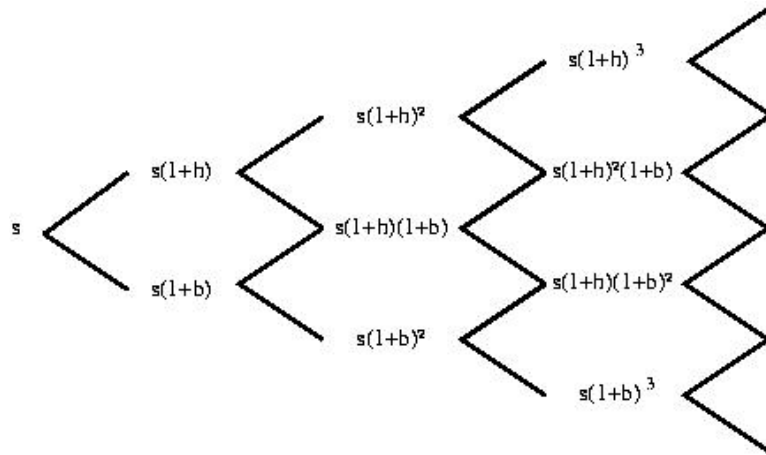
Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, introduit en 1979 fait partie de la famille des modèles binomiaux. Il s'agit de construire un marché financier fini servant de modèle mathématique à la situation boursière simpliste suivante : il n'existe qu'un actif risqué $(S_1(t) ; 0 \leq t \leq T)$ et, comme d'habitude, un actif non risqué $S_0(t) = (1 + r)^t$ où r est le rendement. On suppose que le rendement est fixé une fois pour toutes, il ne dépend donc pas de la période considérée.

Les hypothèses sur le comportement de l'action S_1 sont les suivantes : entre les instants t et $t + 1$, le cours $S_1(t)$ de l'actif risqué est multiplié de façon aléatoire soit par $1 + h$ (valeur

haute), soit par $1 + b$ (valeur basse) avec $h > b$. Cette hypothèse est très restrictive : imposer qu'un cours de bourse soit chaque jour, ou multiplié par 2, ou divisé par 3, apparaît comme hautement irréaliste; elle conduit néanmoins à un modèle intéressant pour 3 raisons :

- il est mathématiquement très simple et permet des calculs explicites ;
- c'est un marché complet ;
- il est l'analogie discret du modèle à temps continu de Black and Scholes : autrement dit, si l'on augmente le nombre de périodes dans le modèle, le comportement du modèle sur un intervalle de temps fixé devient bien moins simple et beaucoup plus réaliste.

On obtient alors l'arbre des prix suivant :



On remarque qu'à la date t , le prix de l'actif risqué peut prendre les valeurs suivantes :

$$S_1(0)(1+h)^t, S_1(0)(1+h)^{t-1}(1+b), \dots, S_1(0)(1+h)(1+b)^{t-1}, S_1(0)(1+b)^t.$$

Ce modèle est très avantageux : même s'il y a 2^T scenarii possibles, il n'y a que $T + 1$ valeurs possibles pour l'actif à l'instant T . Cette particularité est très utile pour la simulation informatique.

4.1 Calcul de la probabilité risque neutre

Pour pouvoir déterminer le prix des produits financiers, il faut trouver une probabilité risque neutre. Il s'agit de mettre en évidence une probabilité $\mathbb{Q} = (q_1, \dots, q_{2^T})$ avec $q_i = \mathbb{Q}(\omega_i)$ telle que, sous cette probabilité, le processus des prix actualisés S_1^* soit une martingale. Il faut donc vérifier les équations :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^*(t+1)|S_1(u), u \leq t] = S_1^*(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Observons d'abord le comportement du prix actualisé sur la première période : le prix actualisé va soit monter au niveau $S_1(0)(1+h)/(1+r)$ soit descendre au niveau $S_1(0)(1+b)/(1+r)$. Supposons qu'il monte avec une probabilité p , il descend alors avec une probabilité $1 - p$ et l'équation ci-dessus avec 0 pour valeur du paramètre t implique

$$pS_1(0)\frac{1+h}{1+r} + (1-p)S_1(0)\frac{1+b}{1+r} = S_1(0).$$

Cette équation est équivalente à

$$p(h-b) = r-b, \quad \text{d'où } p = \frac{r-b}{h-b}.$$

On voit déjà apparaître une condition pour obtenir une probabilité risque neutre : le rendement de l'actif sans risque doit être strictement compris entre h et b . Cette hypothèse paraît bien naturelle, il est facile de trouver une opportunité d'arbitrage dans le cas contraire.

Vérifions maintenant ce qu'il se passe sur la seconde période. Pour cela prenons $t = 1$, l'équation est alors identique à la précédente : supposons que $S_1(1) = S_1(0)(1 + h)$ et notons p la probabilité que le prix augmente sur la seconde période sachant $\{S_1(1) = S_1(0)(1 + h)\}$, alors

$$pS_1(1)\frac{1+h}{1+r} + (1-p)S_1(1)\frac{1+b}{1+r} = S_1(1).$$

Comme le terme $S_1(1)$ se simplifie dans l'équation, l'équation sera toujours la même quelle que soit la période et quelle que soit la valeur de l'actif en début de période. En particulier, la probabilité de monter sur la seconde période sachant $\{S_1(1) = S_1(0)(1 + h)\}$ est la même que sachant $\{S_1(1) = S_1(0)(1 + b)\}$, c'est-à-dire qu'une montée sur la seconde période se produit avec probabilité p indépendamment de ce qui s'est passé sur la première période. Par récurrence, on en déduit le résultat suivant.

Résultat 14 : *sous la probabilité risque neutre, sur chaque période, le prix augmente avec la probabilité $p = \frac{r-b}{h-b}$ et diminue avec la probabilité $1 - p$ indépendamment de ce qui s'est passé sur les périodes précédentes. La probabilité risque neutre est alors donnée par :*

$$q_i = \mathbb{Q}(\omega_i) = p^{N_i}(1-p)^{T-N_i},$$

où N_i désigne le nombre de montées total pour le prix actualisé sur le scenario i ($T - N_i$ est alors le nombre total de descentes).

Ce modèle fait partie de la famille des modèles **binomiaux** : la probabilité que le prix final de l'actif ait une valeur particulière vaut

$$\mathbb{Q}(S_1(T) = S_1(0)(1+h)^k(1+b)^{T-k}) = C_T^k p^k (1-p)^{T-k} = C_T^k \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^k \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{T-k},$$

c'est-à-dire une loi binomiale de paramètre (T, p) . Dans l'équation précédente, C_T^k correspond au nombre de scénarii qui comportent k montées et $T - k$ descentes.

4.2 Evaluation du prix d'une option d'achat européenne

On cherche à déterminer le prix d'un call européen de strike K et d'échéance T . Le payoff d'un tel contrat financier est décrit par :

$$X = (S_1(T) - K)_+ = \max\{S_1(T) - K, 0\}.$$

En appliquant la théorie du pricing en l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix d'un tel contrat est donné par

$$C = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{S_0(T)} \right] = \frac{1}{(1+r)^T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(S_1(T) - K)_+].$$

En utilisant la probabilité risque neutre décrite dans le paragraphe précédent, on obtient :

$$C = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^T C_T^k p^k (1-p)^{T-k} (S_1(0)(1+h)^k(1+b)^{T-k} - K)_+.$$

On définit alors

$$\eta = \inf\{j \geq 0 : S_1(0)(1+h)^j(1+b)^{T-j} - K > 0\}.$$

Il s'agit du minimum de montées nécessaires dans les T périodes pour être *in the money*, c'est-à-dire pour faire un bénéfice. Alors η est le plus petit entier supérieur à

$$\frac{\ln(K/(S_1(0)(1+b)^T))}{\ln((1+h)/(1+b))}.$$

Par ailleurs, en posant

$$B(T, \eta, p) = \sum_{k=\eta}^T C_T^k p^k (1-p)^{T-k},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^T C_T^k p^k (1-p)^{T-k} \left(S_1(0)(1+h)^k (1+b)^{T-k} - K \right)_+ \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=\eta}^T C_T^k p^k (1-p)^{T-k} \left(S_1(0)(1+h)^k (1+b)^{T-k} - K \right) \\ &= S_1(0) \sum_{k=\eta}^T C_T^k \left(\frac{p(1+h)}{1+r} \right)^k \left(\frac{(1-p)(1+b)}{1+r} \right)^{T-k} - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, \eta, p) \\ &= S_1(0) B\left(T, \eta, \frac{p(1+h)}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, \eta, p). \end{aligned}$$

Résultat 15 : le prix d'une option d'achat européenne dans le modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein est donné par

$$S_1(0) B\left(T, \eta, \frac{p(1+h)}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, \eta, p)$$

où $\eta = \inf\{j \geq 0 : S_1(0)(1+h)^j (1+b)^{T-j} - K > 0\}$ et

$$B(T, \eta, p) = \sum_{k=\eta}^T C_T^k p^k (1-p)^{T-k}.$$

Exercice 12 : En vous inspirant de l'exercice 5, donner une formule de parité entre le prix d'un call et le prix d'un put de même strike et de même sous-jacent. En déduire une formule similaire à la précédente pour le prix d'un put dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein.

4.3 Méthode itérative du calcul du prix des options

La formule du résultat 15 s'applique uniquement aux calls européens. Comment calculer le prix d'options de payoff plus complexe ou d'option américaines ? Dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, il est possible de calculer les prix d'un portefeuille de duplication itérativement.

Considérons d'abord le cas d'une option européenne de payoff $X = X(S_1(T))$ sur le sous-jacent S_1 et d'échéance T . La valeur actualisée du portefeuille de duplication à l'échéance T est simplement le payoff actualisé, c'est-à-dire $V_T^* = \frac{X}{S_0(T)} = (1+r)^{-T} X$. Il est possible de montrer que la valeur du portefeuille à la date t ne dépend que de la valeur du sous-jacent à

cette même date, c'est-à-dire que $V_t^* = V_t^*(S_1(t))$. Puisque V_t^* est une martingale, on peut exprimer V_{T-1}^* en fonction de V_T^* comme suit:

$$\begin{aligned} V_{T-1}^*(S_1(T-1)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T^* \mid V_{T-1}^*, V_{T-2}^*, \dots, V_1^*] \\ &= pV_T^*(S_1(T-1)(1+h)) + (1-p)V_T^*(S_1(T-1)(1+b)) \\ &= p(1+r)^{-T}X(S_1(T-1)(1+h)) + (1-p)(1+r)^{-T}X(S_1(T-1)(1+b)). \end{aligned}$$

De même, pour tout $t \leq T-1$,

$$V_t^*(S_1(t)) = pV_{t+1}^*(S_1(t)(1+h)) + (1-p)V_{t+1}^*(S_1(t)(1+b)),$$

ce qui conduit à la méthode de calcul itératif schématisée dans le tableau suivant. On suppose que $T = 2$ et on note $s = S_1(0)$. Le tableau est rempli en commençant par la dernière colonne et en remontant colonne par colonne.

$V_0^*(S_1(0)) = V_0^*(s)$	$V_1^*(S_1(1))$	$V_2^*(S_1(2)) = V_T^*(S_1(T))$
$V_0^*(s) = pV_1^*(s(1+h)) + (1-p)V_1^*(s(1+b))$	$V_1^*(s(1+h)) = pV_2^*(s(1+h)^2) + (1-p)V_2^*(s(1+h)(1+b))$ $V_1^*(s(1+b)) = pV_2^*(s(1+h)(1+b)) + (1-p)V_2^*(s(1+b)^2)$	$V_2^*(s(1+h)^2) = (1+r)^{-3}X(s(1+h)^2)$ $V_2^*(s(1+h)(1+b)) = (1+r)^{-3}X(s(1+h)(1+b))$ $V_2^*(s(1+b)^2) = (1+r)^{-3}X(s(1+b)^2)$

On peut utiliser une méthode similaire pour le calcul des prix d'un call américain, en tenant compte du fait qu'au début de chaque période $[t, t+1]$, le détenteur de l'option a le choix entre exercer immédiatement l'option, et donc obtenir un gain actualisé de $\frac{(S_1(t)-K)_+}{(1+r)^t}$, ou bien attendre, et dans ce cas son gain actualisé espéré est la moyenne des gains en début de période suivante, comme ci-dessus. Ceci conduit à la relation suivante sur la valeur actualisée \hat{V}_t^* du portefeuille de duplication du call américain : pour tout $t \leq T-1$,

$$\hat{V}_t^*(S_1(t)) = \max \left\{ (1+r)^{-t}(S_1(t) - K)_+ ; p\hat{V}_{t+1}^*(S_1(t)(1+h)) + (1-p)\hat{V}_{t+1}^*(S_1(t)(1+b)) \right\}.$$

Cette formule peut être utilisée comme dans le tableau précédent pour un calcul itératif de la valeur de l'option américaine.

5 Modèle de Black et Scholes

Application du modèle de Cox, Ross et Rubinstein au cas continu : Le modèle de Black-Scholes est un modèle mathématique de marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique (aléatoire) continu, en temps continu.

Robert C. Merton a été le premier à publier un article développant l'aspect mathématique d'un modèle de pricing d'option en citant les travaux de Fischer Black et de Myron Scholes. Ceux-ci, publiés en 1973, se fondent sur les développements de théoriciens comme Louis Bachelier ou encore Paul Samuelson. Le concept fondamental de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent.

Merton et Scholes reçurent en 1997 le "Prix Nobel d'économie" pour leurs travaux. Black, du fait de son décès en 1995, était inéligible et a été cité comme contributeur.

Le modèle Black-Scholes repose sur un certain nombre de conditions :

- il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage ;
- les transactions peuvent s'effectuer en continu ;
- il est possible d'effectuer des ventes à découvert ;
- il n'y a pas de coûts de transactions ou de taxes ;
- il est possible d'emprunter ou de placer à un taux sans risque ;
- tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (ex. on peut acheter 1/100e d'action) ;
- il n'y a pas de dividendes.

Il est vrai qu'en pratique le cours de l'action varie continûment et le contenu d'un portefeuille peut-être modifié à tout moment. Pour prendre ceci en compte, on a en choix entre deux méthodes :

- bâtir un modèle continu ;
- couper l'intervalle de temps $[0, T]$, où T est l'échéance, en N morceaux et appliquer le modèle binomial discret de Cox, Ross et Rubinstein.

La première méthode est la plus rigoureuse mais demande un grand investissement théorique : elle est relativement complexe. Nous allons donc essayer de comprendre la seconde méthode : la discréetisation du modèle continu.

Dans le modèle binomial les paramètres r , h et b ne variaient pas. Mais la discrétisation du modèle continu nous impose de prendre des périodes de plus en plus petites : il va donc falloir déterminer de quelle manière ces paramètres dépendent de la période. Pour des petites périodes, on peut considérer que le taux d'intérêt de l'actif sans risque est **proportionnel à la période**. En effet, comme le taux est très faible, ce que rapporte un placement sans risque sur plusieurs périodes est proche de ce qu'il rapporte sur une période multiplié par le nombre de périodes (en tout cas pour un nombre de périodes pas trop élevé !).

Ainsi on choisit le rendement de l'actif sans risque suivant

$$r_N = \frac{\rho T}{N},$$

avec ρ le rendement instantané de l'actif. Notons que le prix de l'actif sans risque sur la totalité de la période de trading $[0, T]$ est multiplié par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + r_N)^N = e^{\rho T}.$$

Pour déterminer les paramètres h et b , un peu plus de travail est nécessaire. Lorsque l'on divise l'intervalle $[0, T]$ en N parties, les rendements possibles h_N et b_N de l'actif sur chacun des sous-intervalles doivent tendre vers 0 quand n tend vers l'infini, mais de quelle manière ?

On peut obtenir le rapport entre la valeur finale et la valeur initiale de l'actif sur l'ensemble de la période de trading $[0, T]$ par l'expression

$$\frac{S_1(T)}{S_1(0)} = \frac{S_1(T/N)}{S_1(0)} \frac{S_1(2T/N)}{S_1(T/N)} \cdots \frac{S_1(NT/N)}{S_1((N-1)T/N)}.$$

Chacune des fractions précédentes peut prendre la valeur $1 + h$ ou $1 + b$. En passant au logarithme, on obtient :

$$\ln \left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)} \right) = \ln \left(\frac{S_1(T/N)}{S_1(0)} \right) + \ln \left(\frac{S_1(2T/N)}{S_1(T/N)} \right) + \dots + \ln \left(\frac{S_1(NT/N)}{S_1((N-1)T/N)} \right)$$

Il s'ensuit que $\ln \left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)} \right)$ est la somme de N variables aléatoires indépendantes de même loi et de variance (sous la probabilité risque neutre)

$$\sigma_N^2 = p_N(1 - p_N) \left(\ln \frac{1 + h_N}{1 + b_N} \right)^2 \quad \text{où} \quad p_N = \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}.$$

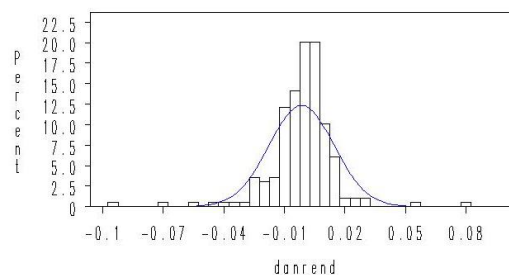
La variance de cette somme est la somme des variances à cause de l'indépendance et vaut donc $N\sigma_N^2$. On suppose alors que $N\sigma_N^2$ converge vers une limite $\sigma^2 T$ lorsque N devient grand, où σ est appelée volatilité instantannée de l'actif risqué. Une manière d'obtenir ce résultat est le choix :

$$h_N = r_N + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} \quad \text{et} \quad b_N = r_N - \sigma \sqrt{\frac{T}{N}}.$$

Une variante du théorème central limite nous assure alors que la limite lorsque N tend vers l'infini de la somme des logarithmes dans l'expression ci-dessus converge vers une variable aléatoire gaussienne (loi normale) de moyenne ρT de variance $\sigma^2 T$. On en déduit donc que **$S_1(T)$ suit une loi lognormale**, résultat fondamental lié au modèle de Black-Scholes, qui se vérifie empiriquement sur une grande quantité de cours d'actions, au moins sur des périodes courtes.

Par exemple en prenant le log-rendement de l'action Danone sur la période allant de mars 2005 à mars 2006, on obtient l'histogramme suivant.

histogramme du rendement de Danone



Passage à la limite pour une option d'achat européenne : On peut maintenant voir le cas continu comme la limite du cas binomial de Cox, Ross et Rubinstein avec les paramètres choisis comme ci-dessus. La formule du cas discret s'écrit :

$$S_1(0)B(N, \eta_N, \frac{p_N(1+h_N)}{1+r_N}) - \frac{K}{(1+r_N)^N}B(N, \eta_N, p_N)$$

Il faut donc regarder la limite $B(N, \eta_N, p_N)$ lorsque N devient grand. En fait on peut écrire B comme une probabilité :

$$B(N, \eta_N, p_N) = 1 - \mathbb{P}(Y_N < \eta_N)$$

où Y_N est la somme de N variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p_N .

La limite de la probabilité se détermine ensuite grâce à une variante du théorème central-limite, ce qui nous permet d'avoir un résultat ne dépendant que de σ et non de h et b . On obtient alors la formule de Black et Scholes.

Résultat 16 : *le prix d'une option d'achat européenne de strike K et d'échéance T connaissant la volatilité σ de l'actif risqué (sous jacent) et le rendement instantané ρ de l'actif sans risque, est donné par :*

$$C = S_1(0)\phi(d) - Ke^{-\rho T}\phi(d - \sigma\sqrt{T})$$

où

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

$$d = \frac{\ln(S_1(0)/K) + \rho T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

On obtient un résultat similaire pour l'option de vente :

$$P = Ke^{-\rho T}\phi(d + \sigma\sqrt{T}) - S_1(0)\phi(d).$$

On peut alors vérifier la formule de parité *call-put* :

$$C = P + S_1(0) - e^{-\rho T}K.$$

Dépendance par rapport à la volatilité : Le but d'une option étant de se couvrir contre des risques de hausse ou de baisse du cours de l'actif, on s'attend à ce que le prix de l'option augmente avec la volatilité de l'actif risqué (plus les variations de l'actif sont incertaines plus une option est intéressante). Ceci se vérifie aisément (après un calcul un peu long mais sans grande difficulté) à partir des formules précédentes. De plus, C tend vers $S_1(0)$ (valeur plafond) quand σ croît à l'infini.

On peut se servir de cette propriété pour estimer la volatilité σ du modèle de Black & Scholes. Plutôt que de l'estimer comme un écart-type empirique sur les valeurs observées de $S_1(t)$ (c'est ce qu'on appelle la *volatilité historique*), on inverse la formule de Black & Scholes de façon à estimer σ à partir des prix des calls et des puts sur le sous-jacent S_1 échangés sur le marché. On parle alors de *volatilité implicite*. Puisque les prix des calls et des puts sont le résultat de l'offre et la demande, on considère que la volatilité implicite reflète indirectement la "perception" des investisseurs de la volatilité réelle. L'intérêt est que cette mesure de volatilité ne dépend que des prix actuels des options, et pas des prix passés du sous-jacent, qui peuvent avoir subi des changements de dynamiques sur la période utilisée pour estimer la volatilité

historique. Pour cette raison, la volatilité implicite est considérée comme une estimation plus précise de la volatilité réelle que la volatilité historique. Remarquons qu'en fonction des strikes et des échéances des calls et des puts utilisés pour estimer la volatilité implicite, on pourrait en principe obtenir des valeurs différentes de volatilité implicite. Cependant, l'expérience montre que ces valeurs varient peu, mis à part le phénomène dit de *smile de volatilité* où la volatilité implicite varie en fonction de la différence entre le strike et le prix du sous-jacent selon une courbe légèrement convexe (en forme de sourire, d'où le nom *smile*).

Exercice 13 : En utilisant le modèle de Black et Scholes, évaluer le prix

a) d'une option d'achat sur un actif dont le prix actuel (spot) est 50 euros avec un prix d'exercice de 50 euros, une maturité $T = 0.5$ année et $r = 10\%$, $\sigma = 25\%$

b) une option de vente avec les mêmes paramètres.

Exercice 14 : Une option d'achat a pour valeur 5.35 euros. Le prix d'exercice (strike) est 40 euros. Le prix actuel de l'actif risqué est $S = 33$ euros. La maturité est 6 mois et le taux d'intérêt sans risque est $r = 6\%$. Utiliser le modèle de Black et Scholes pour déterminer la volatilité implicite de l'actif. Cette méthode de calcul de la volatilité d'un actif basée sur les prix des options le concernant sur le marché est très répandue.

Bibliographie :

- Benninga. *Principles of Finance with Excel*.
- Dana et Piqué. *Marchés financiers en temps continus*.
- Lamberton et Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*.
- Pliska. *Introduction to Mathematical Finance*.
- Rockinger. *Investments*. Collection "Que sais-je ?".