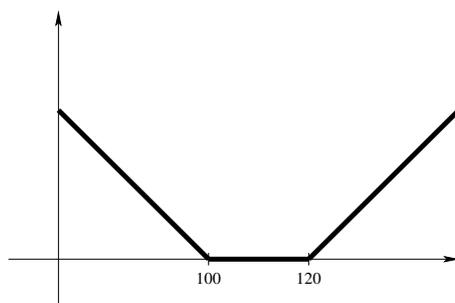


Introduction à la Finance Quantitative

Feuille d'exercices 1

Exercice 1

La figure ci-dessous représente le payoff d'un contrat à terme (en ordonnée) en fonction du prix à maturité du sous-jacent (en abscisse, eu Euros). On suppose que les pentes successives de cette courbes sont -1 , 0 et 1 . On suppose également que la valeur initiale du sous-jacent est 110 Euros.



1. Contre quel risque protège ce contrat à terme ?
2. Ce payoff peut-il être obtenu à l'aide d'un ou plusieurs contrats classiques (call ou put européens ou américains) ? Si oui, comment ?
3. Quelle option offre ce contrat à son détenteur (on l'exprimera en terme de possibilité et/ou obligation d'achat et/ou de vente du sous-jacent à certaine(s) valeur(s) à maturité).

Exercice 2

On considère le modèle de prix sur une période avec un actif sans risque de rendement $r > 0$ et un actif risqué dont les prix sont donnés par :

$S_1(0)$	$S_1(1)$		
	ω_1	ω_2	ω_3
10	8	10	12

En fonction de r , quelles propriétés parmi les deux suivantes sont satisfaites par ce modèle ?

- absence de stratégie dominante,
- absence d'opportunité d'arbitrage,

Exercice 3

1. On considère le modèle de marché suivant. Déterminer la ou les probabilités risque neutre.

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	1	1	1
1	6	7	5	4

2. Si l'on rajoute au modèle précédent l'actif suivant, quelles sont les probabilités risque neutre ? les mesures de valorisation universelles ?

$S_2^*(0)$	$S_2^*(1)$		
	ω_1	ω_2	ω_3
10	8	11	14

3. S'il en existe une, donner une opportunité d'arbitrage dans ce modèle.

Exercice 4

On considère un modèle de prix sur une période avec un actif sans risque de rendement $r = 0$ et deux actifs risqués dont les prix réels sont donnés par :

$S_1(t)$	ω_1	ω_2	ω_3	$S_2(t)$	ω_1	ω_2	ω_3
$t = 0$	5	5	5	$t = 0$	7	7	7
$t = 1$	6	7	4	$t = 1$	9	4	8

1. Déterminer la ou les probabilités risque neutre de ce modèle.

2. Calculer le prix de l'option de payoff $(S_1(1) + 2S_2(1) - 17)_+$.

3. Déterminer l'ensemble des stratégies H qui dupliquent le payoff

	ω_1	ω_2	ω_3
X	9	6	4

Exercice 5

1. Rappeler la formule du payoff d'un call européen de maturité T et de strike K en fonction du prix à maturité $S_1(T)$ de l'actif sous-jacent S_1 .

2. À quel contrat à terme correspond le payoff

$$\sup_{\tau \in [0, T]} (S_1(\tau) - K)_+,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des temps aléatoires¹ entre 0 et T ?

Exercice 6 : formule de parité call-put

On considère un modèle de marché à une période avec un actif sans risque de rendement r et un actif risqué $S_1(t)$. Soit C le prix de l'option d'achat d'échéance T et de strike K sur le sous-jacent S_1 , et soit P le prix de l'option de vente de mêmes échéance, strike et sous-jacent.

1. On suppose que les deux options sont duplicables et qu'il existe une probabilité risque neutre. Montrer que

$$C - P = S_1(0) - \frac{K}{1+r}.$$

2. Montrer l'assertion suivante : soit les deux options sont duplicables soit aucune des deux options ne l'est.

¹Avec une contrainte technique supplémentaire, dont on ne tiendra pas compte pour répondre à la question, que le temps aléatoire τ ne doit se baser que sur l'information passée (cf. la section "filtration" du polycopié).