Introduction à la Finance Quantitative
Feuille d'exercices 2

Exercice 1

On considère un modèle à deux périodes de prix d'actifs. Les prix actualisés des deux actifs risqués figurant dans le modèle prennent les valeurs suivantes.

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	8	10	12
ω_2	8	10	6
ω_3	8	6	7

S_2^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	10	8	9
ω_2	10	8	12
ω_3	10	11	12

1. La stratégie suivante est-elle compatible avec l'information disponible dans ce modèle (on rappelle qu'un stratégie d'investissement ne peut pas anticiper sur l'information future) ?

$$H(1) = (-8, -1, 2), \quad H(2)(\omega_1) = (1, 2, 0), \quad H(2)(\omega_2) = H(2)(\omega_3) = (-2, 3, -1).$$

2. La stratégie donnée par

$$H(1) = (-8, -1, 2), \quad H(2)(\omega_1) = H(2)(\omega_2) = (-4, 1, -1), \quad H(2)(\omega_3) = (-3, 3, -1)$$

est-elle autofinancée ?

Exercice 2

1. Le processus de prix suivant est-il une martingale sous la probabilité $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}(\omega_1), \dots, \mathbb{Q}(\omega_5)) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$?

$S_1^*(t)$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$t=0$	6	6	6	6	6
$t=1$	9	9	4	4	4
$t=2$	10	8	3	2	8

2. Dans le cas où ce n'est pas une martingale, corriger le tableau de façon à ce que $S_1^*(t)$ soit une martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

Exercice 3

On considère le modèle à deux périodes de prix d'actifs suivant: un actif sans risque de rendement nul sur les deux périodes et un actif risqué de prix:

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	5	7	8
ω_2	5	7	5
ω_3	5	4	5
ω_4	5	4	2

1. Calculer la ou les probabilités risque neutre de ce modèle.

2. Calculer le prix de l'option de vente européenne à l'instant $t = 0$ de prix d'exercice (strike) 5 Euros.

3. Déterminer la stratégie de duplication de ce produit financier sur la première période.

Exercice 4

On considère un modèle de prix d'actifs à deux périodes. Le rendement de l'actif sans risque est de $1/3 \approx 33.33\%$ sur la première période et 50% sur la seconde période et les deux actifs risqués sont décrits par :

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	9	10	11
ω_2	9	10	9
ω_3	9	10	8
ω_4	9	7	5
ω_5	9	7	8

S_2^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	6	5	4
ω_2	6	5	10
ω_3	6	7	7
ω_4	6	7	3
ω_5	6	7	9

1. Le marché décrit par ce modèle comporte-t-il des stratégies dominantes ou des opportunités d'arbitrage ? Est-il complet ?

2. Calculer, s'il est bien défini, le prix en $t=0$ du contrat à terme de payoff $X = (S_1(2) + S_2(2) - K)_+$ où $K = 30$.

Exercice 5

On considère un modèle à deux périodes de prix d'actifs. Le rendement de l'actif sans risque est 2 % sur chacune des deux périodes. Le prix actualisé de l'actif risqué figurant dans le modèle prend les valeurs suivantes:

S_1^*	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	100	105	110
ω_2	100	105	102
ω_3	100	102	102
ω_4	100	100	102
ω_5	100	100	99

1. Le marché décrit par ce modèle de prix comprend-t-il une stratégie dominante ? une opportunité d'arbitrage ? est-il complet ?

2. Quel est le prix actualisé au temps $t=1$ et sous l'hypothèse $S_1^*(1) = 100$ du contrat à terme de *payoff* X, avec $X = 306$ Euros si $S_1^*(2) = 102$ et $X = 0$ Euro sinon ?