Introduction à la Finance Quantitative
Feuille d'exercices 2 — Corrigé

Exercice 1

Cette stratégie n'est pas autofinancée, puisque la valeur actualisée du portefeuille en $t = 1$ juste avant la réallocation de portefeuille sur ω_3 vaut $V_1^*(\omega_3) = 8$, et juste après la réallocation de portefeuille, elle vaut $V_1'^*(\omega_3) = 4$.

Exercice 2

1. Non, car $\mathbb{E}(S_1^*(2) \mid S_1^*(0) = 6 \text{ et } S_1^*(1) = 4) = \dfrac{3 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \dfrac{11}{3} \neq 4$. En revanche, toutes les autres relations définissant une martingale sont satisfaites:

$$\mathbb{E}(S_1^*(1) \mid S_1^*(0) = 6) = \mathbb{E}(S_1^*(1)) = 6,$$
$$\mathbb{E}(S_1^*(2) \mid S_1^*(0) = 6 \text{ et } S_1^*(1) = 9) = 9.$$

2. Il suffit par exemple de remplacer le dernier chiffre du tableau, 8, par 10.

Exercice 3

1. La probabilité risque neutre est $\mathbb{Q} = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9})$.

2. On rappelle que $r = 0$. Le payoff est donné par $X = (K - S_1(2))_+$, soit

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
X	0	0	0	3

et on obtient que le prix de l'actif vaut $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0(2)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$ Euros.

3. La stratégie de duplication doit nécessairement avoir pour valeur V_1 au temps $t = 1$ la valeur de l'actif au temps 1, qui est donnée par le théorème de valorisation du cours:

$$V_1^*(\omega_1) = V_1^*(\omega_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0(2)} \mid S_1^*(1) = 7]$$
$$V_1^*(\omega_3) = V_1^*(\omega_4) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0(2)} \mid S_1^*(1) = 4]$$

Puisque $r = 0$, on trouve $V_1 = \begin{cases} 0 & \text{sur } \omega_1, \omega_2 \\ 1 & \text{sur } \omega_3, \omega_4. \end{cases}$

On cherche donc une stratégie $H = (H_0, H_1)$ sur la période $[0, 1]$ telle que $V_0 = \frac{2}{3}$ et V_1 est donné par la formule précédente. On obtient un système 2×2 dont la solution est $H = (\frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$.

Exercice 4

1. On recherche les PRN $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$. Le système déquations satisfait par ce vecteur est

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1 & \text{c'est un probabilité,} \\ q_1 + q_2 + q_3 - 2(q_4 + q_5) = 0 & \text{vient de } \mathbb{E}(S_1^*(1)) = S_1^*(0), \\ q_1 - q_2 - 2q_3 = 0 & \text{vient de } \mathbb{E}(S_1^*(2) \mid S_1^*(1) = 10) = 10, \\ -2q_4 + q_5 = 0 & \text{vient de } \mathbb{E}(S_1^*(2) \mid S_1^*(1) = 7) = 7, \\ -(q_1 + q_2) + q_3 + q_4 + q_5 = 0 & \text{vient de } \mathbb{E}(S_2^*(1)) = S_2^*(0), \\ -q_1 + 5q_2 = 0 & \text{vient de } \mathbb{E}(S_2^*(2) \mid S_2^*(1) = 5) = 5, \\ -4q_4 + 2q_5 = 0 & \text{vient de } \mathbb{E}(S_2^*(2) \mid S_2^*(1) = 7) = 7. \end{cases}$$

On trouve une unique solution $(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9})$. Le modèle est donc sans opportunité d'arbitrage, complet (et donc sans stratégie dominante).

2. Attention, le payoff fait intervenir (comme toujours) les prix non actualisés. On a ici $S_0(2) = (1+1/3)(1+1/2) = 2$, donc, en $t = 2$, les prix non-actualisés sont le double des prix actualisés. On obtient donc

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
X	0	8	0	0	4

. Le prix actualisé du contrat à terme est donc $V_0^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \frac{X}{S_0(2)} = \frac{8}{2} \times \frac{1}{12} + \frac{4}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.