Notions mathématiques de base pour comprendre le cours d'Introduction à la Finance Quantitative

N. Champagnat

Contents

1 Rappels mathématiques

Les outils mathématiques de ce cours restent à un niveau élémentaire. Nous avons besoin de deux ingrédients principaux : résolution pratique des systèmes d'équations linéaires et probabilités discrètes élémentaires. Le but de cette partie est de faire les rappels nécessaires sur ces sujets.

1.1 Résolution pratique des systèmes linéaires

Un système de k équations linéaires d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ a pour forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres réels. Une solution de ce système est un vecteur réel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui satisfait les k égalités précédentes. a_{ij} s'appelle le **coefficient de x_j dans l'équation i** et b_i le **second membre de l'équation i**.

Les méthodes de résolution habituelles de tels systèmes n'utilisent rien d'autre que les deux propriétés suivantes : si $a = b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda a = \lambda b$; si $a = b$ et $c = d$, alors $a + b = c + d$. Il s'agit d'utiliser ces relations pour éliminer des variables de certaines équations.

Exemple 1 : On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} 2x & +2y & +z & -t & = 1 \\ -2x & +y & -3z & -2t & = 0 \\ 2x & -y+ & & +t & = -2 \\ 2x & +2y & +2z & & = 1. \end{array} \right.$$

En additionnant les équations 2 et 3 et en soustrayant l'équation 4 à l'équation 1, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rrl} -3z & -t & = -2 \\ -z & -t & = 0. \end{array}\right.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient $-2z = -2$, soit $z = 1$. En substituant cette valeur dans la seconde équation précédente, on obtient $-1 - t = 0$, soit $t = -1$. Si on remplace z et t par ces valeurs dans les deux premières équations du système de départ, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +2y & = -1 \\ -2x & +y & = 1. \end{array}\right.$$

En additionant ces deux équations, on obtient $y = 0$, puis en substituant cette valeur dans la première équation, on obtient $x = -1/2$.

La méthode de résolution précédente est rapide, mais repose fortement sur la forme du système de départ. Il est souhaitable de disposer d'une méthode de résolution systématique qui permette de traiter tous les systèmes linéaires. Il s'agit du **pivot de Gauss**. Cette méthode est parfois moins rapide que des astuces de calcul comme celles de l'exemple précédent, mais elle fournit à coup sûr le résultat.

1.1.1 Le pivot de Gauss

La méthode consiste à choisir un **pivot**, c'est-à-dire un coefficient non nul du système, et à se servir de l'équation correspondante pour éliminer la variable correspondante de toutes les autres équations. On obtient alors, un sous-système avec $k-1$ équations et $n-1$ inconnues, sur lequel on recommence la procédure tant qu'il reste deux équations ou plus.

Retour à l'exemple 1 : Dans le système précédent, choisissons pour pivot le terme $-t$ dans la première équation. Afin d'éliminer t de la seconde équations, il faut éliminer le terme $-2t$, ce qui peut se faire en soustrayant à la seconde équation 2 fois la première équation. On obtient

$$-6x + 5y - 5z = -2.$$

De même, on élimine la variable z des équations 3 et 4 et additionnant la première équation à la troisième, et en ne faisant rien à la quatrième. La première étape du pivot de Gauss donne :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & +2y & +z & -t & = 1 \\ -6x & -3y & -5z & & = -2 \\ 4x & +y & +z & & = -1 \\ 2x & +2y & +2z & & = 1. \end{array}\right.$$

On travaille maintenant sur équations 2, 3 et 4, et on ne touche plus à la première. On choisit un second pivot *dans une autre équation que celle où le premier pivot a été choisi*, par exemple le terme $2x$ dans la dernière équation. On élimine la variable x des équations 2 et 3 en additionant 3 fois la quatrième à la seconde, et en soustrayant 2 fois la quatrième à la troisième, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & +2y & +z & -t & = 1 \\ & 3y & +z & & = 1 \\ & -3y & -3z & & = -3 \\ 2x & +2y & +2z & & = 1. \end{array}\right.$$

On travaille maintenant sur les équations 2 et 3. On choisit par exemple le pivot $-3z$ dans l'équation 3. On élimine z de l'équation 2 en lui additionant $1/3$ fois l'équation 3, et on trouve finalement

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & +2y & +z & -t & = 1 \\ & 2y & & & = 0 \\ & -3y & -3z & & = -3 \\ 2x & +2y & +2z & & = 1. \end{array}\right.$$

La seconde équation nous donne $y = 0$. En remplaçant y par sa valeur, il reste une seule inconnue dans l'équation 3 et on trouve $z = 1$. En remplaçant y et z par leurs valeurs, il reste une seule inconnue dans l'équation 4, et on trouve $x = -1/2$. De même, il reste une seule inconnue dans la première équation et on trouve $t = -1$.

Deux cas particuliers peuvent apparaître aucours de la méthode du pivot :

- On peut arriver à deux équations proportionnelles avec second membre également proportionnel. Dans ce cas, on supprime l'une des deux équations et le système est dit **redondant**.
  Exemple 2 : Si on choisit pour pivot le terme x de la première équation du système

  $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 1 \\ -x & & -2z & = 0 \\ x & +3y & -z & = 3, \end{array}\right.$$

  on obtient le système

  $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 1 \\ & y & -z & = 1 \\ & 2y & -2z & = 2. \end{array}\right.$$

  Les deux dernières équations sont proportionnelles. On peut retirer l'une des deux du système.

- On peut arriver à deux équations dont les membres de gauches sont proportionnels *mais pas les second membres*. On dit alors que le système est **incompatible** et il n'y a pas de solution au système.
  Exemple 3 : En appliquant la même méthode que dans l'exemple 2 au système

  $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 1 \\ -x & & -2z & = 1 \\ x & +3y & -z & = 3, \end{array}\right.$$

  on obtient

  $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 1 \\ & y & -z & = 2 \\ & 2y & -2z & = 2. \end{array}\right.$$

  Les deux dernières équations sont incompatibles. Le système n'a pas de solution.

A la fin de la méthode, plusieurs cas peuvent se présenter :

- Le système est incompatible et il n'a pas de solution.

- Après avoir retiré les équations redondantes, il reste autant d'équations que d'inconnues. Dans ce cas, le système admet une unique solution, comme dans l'exemple 1.

- Après avoir retiré les équations redondantes, il reste plus d'inconnues que d'équations. Le système admet alors une infinité de solutions, obtenues en donnant des valeurs arbitraires à toutes les inconnues non éliminées aucours de la méthode du pivot, sauf une.
  Retour à l'exemple 2 : après élimination de l'équation 3, redondante, on obtient le système
$$\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ & y & -2z & = 1. \end{cases}$$
  On a éliminé la variable x de la seconde équation, et il reste les inconnues y et z. Si on fixe une valeur arbitraire à la variable z, par exemple $z = 1$, on trouve $y = 3$ et $x = -3$. Autrement dit, on peut exprimer les inconnues x et y en fonction de la variable z, qui peut prendre toutes les valeurs réelles : on a
$$y = 2z + 1 \qquad \text{et} \qquad x = 1 - z - y = -3z,$$
  et les solution au système sont les vecteurs $(-3z,\ 2z+1,\ z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Remarque : On écrit souvent les systèmes linéaires sous forme matricielle. Par exemple, le système de l'exemple 1 peut s'écrire
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Le premier tableau dans cette écriture s'appelle la **matrice du système**, et le dernier le **vecteur second membre**. Cette écriture à l'avantage d'être plus compacte et de ne manipuler qu'un tableau de nombres sans inconnues. Avec cette écriture, le pivot de Gauss revient à faire des manipulations sur les lignes du tableau (les multiplier par des constantes et les additionner entre elles). Si l'on prend bien garde d'effectuer *les mêmes opérations* sur le vecteur colonne du second membre, on obtient à la fin de la méthode le même système réduit, écrit sous forme matricielle, qui se résout de proche en proche.

1.1.2 Quelques propriétés utiles

Quelques propriétés des systèmes linéaires :

- *Un système linéaire* non incompatible *avec plus d'inconnues que d'équations admet toujours au moins une solution.*
- *Un système linéaire* non incompatible *avec strictement plus d'inconnues que d'équations admet toujours une infinité de solutions.*
- *Un système linéaire* non redondant *avec strictement plus d'équations que d'inconnues est toujours incompatible.*
- *Un système linéaire* non incompatible *et* non redondant *avec autant d'équations que d'inconnues admet toujours une unique solution. Cette propriété reste vraie quel que soit le second membre de l'équation. Elle reste également vraie pour le système transposé, obtenu en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice du système.*

1.2 Rappels de probabilités discrètes

Dans ce cours, nous n'étudions que des modèles probabilistes de marchés financiers *discrets*, c'est-à-dire ne comprenant qu'un nombre fini de scenarii possible. Quelques rappels sont utiles dans ce cadre.

1.2.1 Définitions de base

- Un modèle probabiliste comporte une **ensemble de scenarii** (ou univers, ou espace de probabilités) noté Ω. Pour nous, ce sera un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_k\}$. Chaque ω_i représente un **scenario** (ou événement élémentaire) possible pouvant se produire dans l'expérience aléatoire considérée. A la fin de l'expérience aléatoire, un seul des scenarii se réalise. Du fait de l'aléa, on ne peut pas prévoir lequel, et le travail de modélisation consiste à associer une probabilité à chacun des scenarii (voir ci-dessous).

- Tout sous ensemble A de Ω s'appelle un **événement**. Parmi les événements, il y a notamment l'**événement vide** $A = \emptyset$ et l'**événement certain** $A = \Omega$. Par exemple, l'événement $A = \{\omega_2\}$ est l'événement où seul le scenario ω_2 se réalise.

- Le modèle aléatoire comporte également une **mesure de probabilité** $\mathbb{P}$ qui associe une probabilité $\mathbb{P}(\omega_i) \in [0, 1]$ à chaque événement ω_i. Pour tout événement $A \subset \Omega$, sa probabilité est définie par
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$
Pour satisfaire à la définition intuitive d'une probabilité comme la proportion de fois où l'événement se réalise lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, on doit avoir $0 \leq \mathbb{P}(\omega_i) \leq 1$ pour tout i et
$$\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_i) = 1.$$
Un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ est dit **événement presque certain**. On dit aussi que A se réalise **presque sûrement**.

- Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$, la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B est définie par
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$
Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(B)$.
Si $B \subset A$, $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$.

- En fonction du résultat de l'expérience aléatoire, on peut considérer divers paramètres ou résultats du phénomène considéré, appelés **variable aléatoire**. Plus précisément, on appelle variable aléatoire (ou v.a.) toute fonction X définie sur Ω à valeurs réelles. $X(\omega_i)$ est alors la valeur prise par la variable aléatoire X si le scenario ω_i se réalise. On note habituellement les variables aléatoires avec des lettres capitales.

- On définit **l'espérance** de la v.a. X par
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i).$$
C'est la **valeur moyenne** qu'on obtient pour la v.a. X à l'issue de l'expérience aléatoire.

- La **variance** de la v.a. X est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

  Ce nombre est une manière de mesurer l'amplitude des fluctuations aléatoires possibles pour la v.a. X. Si X est une v.a. **déterministe**, c.-à-d. prenant la même valeur sur tous les scenarii, $\mathrm{Var}(X) = 0$.

- On peut construire des événements à partir d'une v.a. X par exemple en regardant tous les scenarii ω tels que $X(\omega) = x$, où x est un nombre réel fixé. Cet événement est noté $\{X = x\}$. De même, on peut définir les événements $\{X \in [a, b]\}$ pour tout $a < b$.

- Sur un espace de probabilité fini, une v.a. X ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \dots, x_n$ (on parle de **variables aléatoires discrètes**). On définit alors la **loi de la v.a.** X comme l'ensemble des valeurs

$$\mathbb{P}\{X = x_i\}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

  Deux v.a. différentes peuvent avoir même loi.

- Si X et Y sont deux v.a. la **covariance de** X **et** Y est définie par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

  Si $Y = X$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}(X)$.
  Si $Y = -X$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\mathrm{Var}(X)$.

- Si X et Y sont deux v.a. on dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tout $a < b$ et $c < d$,

$$\mathbb{P}(X \in [a, b] \text{ et } Y \in [c, d]) = \mathbb{P}(X \in [a, b])\mathbb{P}(Y \in [c, d]).$$

  De façon équivalente, X et Y sont indépendantes si pour tous x, y réels,

$$\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

  L'indépendance de deux v.a. signifie que la valeur prise par l'une n'a aucune influence sur la valeur prise par l'autre. Exprimé en termes de probabilités conditionnelles, ceci revient à dire que, pour tout x, y réels avec $\mathbb{P}(Y = y) > 0$,

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x).$$

- Si X et Y sont indépendantes, pour toutes fonctions f et g à valeurs réelles, $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$. En particulier,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

  En d'autres termes, la covariance est une manière de mesurer à quel point les v.a. X et Y sont indépendantes, ou bien inversement, à quel point elles sont **corrélées**.

- De même, les v.a. $X_1, \dots, X_n, \dots$ sont indépendantes si, pour tout $n \geq 1$ et pour tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \dots\ X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

1.2.2 Quelques lois usuelles

Sur un espace de probabilité discret, les v.a. prennent des valeurs discrètes, par exemple entières. Voici quelques loi usuelles sur $\mathbb{N}$.

- Une v.a. X suit **la loi uniforme sur** $\{0, 1, \dots, n\}$**,** où $n \in \mathbb{N}$, si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

  Autrement dit, chaque valeur possible de X est **équiprobable**. On vérifie que $\mathbb{E}(X) = n/2$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{n(n+2)}{12}$.

- Une v.a. X suit **la loi de Benoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

  Il s'agit du résultat d'un lancer de pile ou face avec une pièce biaisée tombant sur face avec probabilité p. On a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$.

- Une v.a. X suit **la loi binomiale de paramètres** $n \geq 1$ **et** $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

  où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial. On peut vérifier que cette loi s'obtient en faisant la somme de n v.a. de Bernoulli de paramètre p indépendantes. On a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.

- Une v.a. X suit **la loi géométrique de paramètre** $p \in]0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \qquad \forall k \geq 1.$$

  C'est la loi du premier tirage donnant face lorsqu'on joue au jeu de pile-ou-face de façon répétée avec une pièce tombant sur face avec probabilité p. On a $\mathbb{E}(X) = 1/p$ et $\mathrm{Var}(X) = (1 - p)/p^2$.

- Une v.a. X suit **la loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \forall k \geq 0.$$

  On a $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Les deux dernières lois, ainsi que les deux résultats fondamentaux ci-dessous ne peuvent pas être construites sur un espace de probabilité fini, puisque les v.a. correspondantes peuvent prendre un nombre infini (dénombrable) de valeurs. Pour leur donner un cadre rigoureux, il faudrait les énoncer sur un espace de probabilité dénombrable. Les notations et définitions précédentes peuvent cependant être étendues sans difficulté à ce contexte.

1.2.3 Deux résultats fondamentaux

Loi des grands nombres *On considère une suite de v.a. indépendantes discrètes de même loi (et donc de même espérance) $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathbb{E}(X_1),$$

où la convergence a lieu au sens presque sûr (c.-à-d. avec probabilité 1).

Ce résultat justifie la notion intuitive de la probabilité d'un événement A comme nombre moyen de fois que A se réalise lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire de façon indépendante. Il suffit pour cela de prendre pour X la v.a. valant 1 si A se réalise et 0 sinon.

Le second résultat indique que les fluctuations autour de la limite précédente se comportent de façon universelle (c.-à-d. indépendemment de la loi de départ des v.a. X_i) et font apparaître la célèbre loi de Gauss, ou loi normale.

Théorème de la limite centrale *On considère une suite de v.a. indépendantes discrètes de même loi $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Pour tout $n \geq 1$, soit $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Alors*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad \text{où} \qquad \sigma^2 = Var(X),$$

converge quand $n \to +\infty$ vers la loi normale centrée réduite, au sens où, pour tout $a < b$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \in [a, b]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

1.3 Un exercice

L'exercice simple suivant met en pratique les rappels précédents, et anticipe sur les outils introduits dans la suite.

1. On considère l'espace de probabilité $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, et deux v.a. X et Y définies par

	ω_1	ω_2	ω_3
X	3	-1	2
Y	-1	-3	-2

   Déterminer les mesures de probabilités sur Ω telles que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(Y) = -2$.

2. Même question pour

	ω_1	ω_2	ω_3
X	3	-1	1
Y	-1	-3	-2

3. Avec les mêmes v.a. que dans la question précédentes, déterminer les mesures de probabilités sur Ω telles que $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\mathbb{E}(Y) = -1,5$.
   Calculer pour chacune d'entre elles $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes sous une de ces mesures de probabilité ?