# Introduction à la Finance Quantitative, Marchés de l'énergie 3A

Nicolas Champagnat

## Sujet de projet 2022–2023

On demande de répondre aux questions en justifiant les réponses, dans un document ou un scan envoyé par mail à `nicolas.champagnat@inria.fr`. On fournira également le tableur excel ou le code source du programme de calcul scientifique ayant servi à réaliser les études numériques.

Anticipant les fortes fluctuations des prix de l'énergie et les besoins des entreprises, une banque française souhaite proposer sur les marchés financiers des futurs et des options sur électricité, dans l'esprit des produits existants (cf. `https://www.cmegroup.com/education/courses/introduction-to-power/energy-market-and-risk-management-with-options.html`).

Son idée est de proposer à ses clients disposant de panneaux photovoltaïques de racheter certains mois leur production à un prix fixe, afin de mettre en place une stratégie de gestion de portefeuille comme vu dans le cours, mais où l'actif risqué est le prix de l'électricité photovoltaïque achetée à ses clients. Pour pouvoir mettre en place une telle stratégie, il est nécessaire de pouvoir stocker l'électricité. La solution retenue est d'utiliser un parc de pompage mécanique.

L'objectif de ce projet est d'étudier comment modéliser le problème de pricing d'un futur ou d'un call (européen ou américain) sur électricité selon le principe précédent.

**1.** On suppose que la prodution photovoltaïque des clients de la banque est d'un millième (1/1000) du parc photovoltaïque français total. Le but de cette question est de modéliser la quantité correspondante d'énergie produite mensuellement à l'aide d'un modèle de Cox-Ross-Rubinstein où chaque période correspond à un mois. Pour simplifier, on va se placer dans ce projet dans le cas d'un horizon de 5 mois, et on note $Q_t$ (avec $0 \leqslant t \leqslant 5$) la quantité dénergie photovoltaïque produite par les clients de la banque aucours du mois $t$. Avec les notations du cours, on suppose que $b = -h$ et que la probabilité que $Q_{t+1} = (1 + h)Q_t$ vaut 1/2.

**a)** Montrer que $\mathbb{E}(Q_5) = Q_0$ et $\mathrm{Var}(Q_5) = Q_0^2[(1 + h^2)^5 - 1]$.

**b)** Télécharger sur `https://www.rte-france.com/eco2mix/telecharger-les-indicateurs` les données de production électrique mensuelle pour la France entière de 2021 (certains liens semblent ne pas fonctionner, mais il est possible de télécharger sur cette même page l'ensemble des données mensuelles dans un tableur Excel). Extraire les données photovoltaïques mensuelles. Utiliser ces données et la question précédente pour estimer les paramètres $Q_0$ et $h$ du modèle précédent.

**c)** On rappelle que la banque propose de racheter à certains de ses clients leur production mensuelle à prix fixe. Justifier que le prix du KWh pour le mois $t$, noté $S_1(t)$, est proportionnel à l'inverse de $Q_t$.

**d)** On supposera pour simplifier que $S_1(t) = 1/Q_t$ (où la constante $1 = 1\,€\cdot$MWh). Montrer que $S_t$ suit un modèle de Cox-Ross-Rubinstein dont on précisera les paramètres $S_1(0)$, $h$ et $b$.

**e)** On fait l'approximation de supposer que le stockage de l'énergie par pompage mécanique revient à une perte énergétique mensuelle de 10%. Expliquer pourquoi ceci revient à modifier dans le modèle précédent le rendement $r$ de l'actif sans risque en $r + 10\%$ et les prix de l'actif risque $S_1(t)$ en $S_1(t) \times (1.1)^t$ (on supposera pour simplifier ici et dans la suite que $r = 0$). Montrer qu'il s'agit de nouveau d'un modèle de Cox-Ross-Rubinstein dont on calculera les nouveaux paramètres $S_1(0)$, $h$, $b$ e $r$.

**f)** Remplir une feuille de calcul Excel avec les valeurs possibles de $S_1(t)$ en fonction du temps $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ pour les paramètres calculés à la question précédente, ainsi que les valeurs actualisées $S_1^*(t)$. On demande de fournir le tableur Excel (ou le code source du logiciel de calcul scientifique) utilisé.

**2.** On considère le contrat *futur* sur le sous-jacent $S_1(t)$ d'échéance $T = 5$, et on note $K$ le prix de la transaction future associée à ce contrat.

**a)** Exprimer le payoff de ce contrat à l'aide de $S_1(T)$ et $K$. (Indication: on rappelle que, contrairement aux options, le payoff d'un tel contrat peut être positif ou négatif suivant que la valeur du sous-jacent à l'échéance est plus ou moins grande que $K$.)

**b)** Expliquer pourquoi, lorsque l'acheteur et le vendeur du contrat futur sont d'accord pour considérer que le modèle de la question **1.f)** est une bonne représentation des prix futurs du sous-jacent, alors la valeur de $K$ dans le contrat futur doit être choisie de telle sorte que le prix (ou valeur initiale) du contrat associé au payoff de la question précédente est nul.

**c)** Déduire des résultats du cours une expression de $K$ en fonction de l'espérance sous la probabilité risque neutre de la valeur du sous-jacent à l'échéance $S_1(T)$ et de $r$. Déduire ensuite du fait que $S_1^*(t)$ est une martingale une expression de $K$ en fonction de $S_1(0)$ et de $r$, puis calculer la valeur de $K$ pour les paramètres du modèle de la question **1.f)**.

**3.** On considère maintenant le *call européen* de strike $K$ (où la valeur de $K$ a été calculée en question **2.c)**) sur le sous-jacent $S_1(t)$ d'échéance $T = 5$.

**a)** On note $C_t(x)$ le prix du call précédent à la date $t$ lorsque le sous-jacent vaut $x$ (c'est-à-dire lorsque $S_1(t) = x$). On rappelle que le processus de prix actualisé de ce call, c'est-à-dire le processus $(C_t^*(S_1(t)), t = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, forme une martingale sous la probabilité risque neutre. Justifier la relation

$$C_t(x) = \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-b}{h-b}C_{t+1}((1+h)x) + \frac{h-r}{h-b}C_{t+1}((1+b)x)\right).$$

**b)** Expliquer comment utiliser cette formule pour calculer le prix du call. (Indication: on commencera par donner la valeur de $C_T(x)$, puis on expliquera comment calculer de proche en proche les valeurs du call à différentes dates et suivant les différentes valeurs du sous-jacent.)

**c)** Mettre en œuvre la méthode précédente dans le tableur Excel de la question **1.f)** et calculer le prix du call européen à la date initiale $t = 0$.

**4.** On considère maintenant le *call américain* de strike $K$ sur le sous-jacent $S_1(t)$ d'échéance $T = 5$. $(S_1(t), t = 0, \ldots, 5)$. On note $C_t^a(x)$ ($a$ pour "américain") son prix à la date $t$ lorsque le sous-jacent vaut $S_1(t) = x$.

**a)** Donner une interprétation de la relation (que l'on admettra)

$$C_t^a(x) = \max\left\{\frac{1}{1+r}\left(\frac{r-b}{h-b}C_{t+1}^a((1+h)x) + \frac{h-r}{h-b}C_{t+1}^a((1+b)x)\right) \; ; \; (x-K)_+\right\}.$$

**b)** A l'aide de la relation précédente, proposer une méthode pour calculer le prix du call américain, la mettre en œuvre dans le tableur Excel de la question **1.f)** et calculer le prix du call américain à la date initiale $t = 0$. Comparer avec le résultat de la question **3.c)**.

**5.** Selon vous, le projet de la banque et la méthode de réalisation choisie vous semblent-ils raisonnables (d'un point de vue légal, économique, de compétitivité par rapport à d'autres méthodes...) ?